Matrices en grafen

Haemers, W.H.

Published in:
Matrices

Publication date:
1986

REPRINT FROM: CWI SYLLABUS 10
VACANTIECURSUS 1986: MATRICES

Centrum voor Wiskunde en Informatica
Kruislaan 413, 1098 SJ Amsterdam

MATRICES EN GRAFEN

W.H. Haemers
Katholieke Hogeschool Tilburg

MATRICES EN GRAFEN

In dit hoofdstuk zullen we met behulp van matrices enige resultaten afleiden voor grafen en andere combinatorische structuren. Matrixtheorie is een zeer belangrijk hulpmiddel in de combinatoriek. Er zijn belangrijke resultaten die puur combinatorisch van aard zijn, maar die zonder gebruik van matrixtheorie onoplosbaar lijken. In veel gevallen blijkt dan het bewijs met behulp van matrices verrassend elementair te zijn. In dit hoofdstuk worden enige voorbeelden van dit verschijnsel behandeld.

We gebruiken de volgende notatie. Een matrix waarvan elk element 1 is noteren we als J, en O staat voor de matrix waarvan elk element 0 is. Een vector waarvan elke coördinaat 1 is (een kolom van J dus) noteren we als j.

§ 1 DE ONGELIJKHEID VAN FISHER

Beschouw het voorbeeld van de tramlijnen en haltes uit Hoofdstuk 1. Dit tramnet voldoet aan de eigenschap dat elke twee haltes op precies een tramlijn liggen (tramreizigers hoeven dus niet over te stappen of te twijfelen over de te nemen lijn). Bovendien heeft elke lijn evenveel haltes en ligt elke halte op precies evenveel lijnen. Men kan zich afvragen onder welke voorwaarden zo'n tramnet te realiseren is en wat voor eigenschappen er kunnen worden afgeleid. Een belangrijke eigenschap is de ongelijkheid van Fisher die zegt dat als niet alle haltes op een tramlijn liggen, er tenminste zoveel tramlijnen als haltes zijn. Het bewijs van deze ongelijkheid is een mooie illustratie van het gebruik van matrices. We zullen in deze paragraaf dit bewijs dan ook geven.

Behalve Fishers ongelijkheid zijn er nog andere voorwaarden bekend die nodig zijn voor het bestaan van zo'n tramlijnen stelsel. Ook zijn er verschillende constructiemethoden bekend. Maar lang niet alles is hiermee gedekt. Een van de grote open problemen in dit vakgebied is de vraag of er zo'n tramlijnennet bestaat met 100 haltes en 10 haltes per lijn (het zogeheten affiene vlak van de orde 10).

Het tramnet is een speciaal geval van een blok-design. Een blok-design met parameters v,b,k,r en λ $(1 \leqslant k \leqslant v-1)$ is een verzameling V met v elementen samen met een collectie deelverzamelingen van V, blokken geheten (b is het aantal blokken), zodanig dat aan de volgende eisen is voldaan.

i. Elk blok heeft k elementen,

ii. elk element van V zit in precies r blokken,

iii. elk paar elementen van V komt voor in precies λ blokken.

Het stelsel tramlijnen uit Hoofdstuk 1 is een voorbeeld van een blok-design met parameters $v = b = 7$, $k = r = 3$ en $\lambda = 1$. Overigens is de bovenstaande definitie overbepaald. Met behulp van teltechnieken kan eis (ii) uit (i) en (iii) worden afgeleid. Blok-designs worden ondermeer gebruikt bij statistische proeven. De consumentenbond wil bijvoorbeeld de smaak testen van 7 merken cola. Daartoe krijgt een aantal proefpersonen ieder 3 merken cola om op smaak te vergelijken. Om de test zo eerlijk mogelijk te houden is het van belang dat elk merk even vaak wordt geproefd en dat elk tweetal merken door evenveel proefpersonen wordt vergeleken. Het tramlijnennet uit Hoofdstuk 1 geeft een mogelijk schema voor deze cola test.

Bij een blok-design hoort een incidentiematrix N. De rijen van N zijn de elementen van V en de kolommen van N zijn de blokken. Verder is N als volgt gedefinieerd.

$$(N)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{als element } i \text{ in blok } j \text{ zit,} \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

We zullen eis (i) t/m (iii) vertalen in termen van matrix N. Eis (i) betekent dat elke kolomsom van N gelijk is aan k, dus

i'. $\quad N^t \mathbf{j} = k \mathbf{j}$.

Evenzo is eis (ii) gelijkwaardig met

ii'. $\quad N \mathbf{j} = r \mathbf{j}$.

Eis (iii) betekent dat $(NN^t)_{ij} = \lambda$ voor $i \neq j$, immers $(NN^t)_{ij}$ is het inwendig product van rij i met rij j en dus gelijk aan het aantal malen dat er op overeenkomstige posities een 1 staat. Hieruit volgt

iii'. $\quad N N^t = \lambda J + (r - \lambda) I$.

De stelling van Fisher is een direct gevolg van (iii').

STELLING 1. Voor een blok-design met parameters v,b,k,r en λ geldt

$$b \geqslant v.$$

BEWIJS. We zullen laten zien dat rang $N = v$. Hieruit volgt meteen de ongelijkheid want de rang van een matrix is niet groter dan het aantal kolommen. We definieren

$$N' = \frac{1}{r-\lambda} N^t - \frac{\lambda}{r(r-\lambda)} J.$$

Het is niet moeilijk in te zien dat $r-\lambda \neq 0$ als $0<k<v$, zoals vereist in de definitie. Gebruik makend van (ii') en (iii') vinden we

$$NN' = \frac{1}{r-\lambda} NN^t - \frac{r\lambda}{r(r-\lambda)} J = \frac{\lambda}{r-\lambda} J + I - \frac{\lambda}{r-\lambda} J = I.$$

Een fundamentele eigenschap van de rang zegt dat de rang van het product van matrices niet groter is dan de rang van elke factor. Daarom geldt

$$\text{rang } N \geqslant \text{rang } NN'.$$

Met rang NN' = rang $I = v$ en rang $N \leqslant v$ volgt hieruit dat rang $N = v$. Hiermee is de ongelijkheid van Fisher bewezen.

Bovenstaande afleiding wijkt iets af van de gebruikelijke bewijsmethode. Meestal wordt bewezen dat $NN^t = \lambda J + (r-\lambda)I$ niet singulier is, waaruit de ongelijkheid volgt op dezelfde manier. Het voordeel van onze aanpak is dat er meteen conclusies getrokken kunnen worden voor het geval $v=b$. Het blok-design wordt dan symmetrisch genoemd. Inderdaad, als $v=b$ dan is N' de inverse matrix van N. Er geldt dus

$$NN' = N'N = I.$$

Met (i') volgt

$$N'N = \frac{1}{r-\lambda} N^tN - \frac{k\lambda}{r(r-\lambda)} J.$$

Er geldt dat $k = r$ als $b = v$, want het totaal aantal enen in N is zowel gelijk aan bk als aan vr. Dus volgt nu

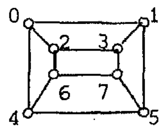
$$N^t N = J + (r-\lambda) I.$$

Dit betekent dat N^t ook de incidentiematrix is van een blok-design. Anders gezegd, de doorsnede van elk tweetal blokken bevat precies λ elementen.

§ 2 GRAFEN EN EIGENWAARDEN

Beschouw de volgende graaf

G_1 :



Bij deze graaf maken we de zogeheten verbindingsmatrix A als volgt

$$A_1 : \quad \begin{array}{c|cccccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Dus $(A)_{ij} = 1$ als punt i en j verbonden zijn en $(A)_{ij} = 0$ als $i = j$ of als i en j niet verbonden zijn. Als we de punten van G_1 in een andere volgorde zetten krijgen we een andere verbindingsmatrix. Bijvoorbeeld

$$A_1' : \quad \begin{array}{c|cccccccc} & 0 & 3 & 5 & 6 & 7 & 4 & 2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Het is duidelijk dat A_1 en A_1' dezelfde eigenwaarden hebben, immers $\det(A_1 - xI) = \det(A_1' - xI)$. In het algemeen geldt dat de eigenwaarden van de verbindingsmatrix van een graaf niet afhangen van de volgorde van de punten. We spreken daarom vaak kortweg over de eigenwaarden van een graaf. De liefhebber kan verifiëren dat de eigenwaarden van G_1 zijn 3,1,-1 en -3 met multipliciteiten 1,2,2 en 1 respectievelijk. In dit hoofdstuk beschouwen we alleen eindige grafen, ongericht en zonder lussen of meervoudige verbindingen. Dit houdt in dat de verbindingsmatrix symmetrisch is met 0 op de diagonaal en 0 of 1 elders. De eigenwaarden zijn dan reëel en we noteren ze als $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_v$, waarin v het aantal punten van de graaf is. We zullen nu een aantal begrippen introduceren.

Een graaf heet k-*regulier* als elk punt met precies k punten verbonden is. Bijvoorbeeld G_1 is 3-regulier.

Een (niet lege) graaf heet *bipartiet* als de punten in twee deelverzamelingen verdeeld kunnen worden, zodanig dat er binnen de beide deelverzamelingen geen verbindingen bestaan. Graaf G_1 bijvoorbeeld is bipartiet, hetgeen duidelijk wordt geïllustreerd door matrix A_1'.

Een graaf heet *samenhangend* als vanuit elk punt naar elk ander punt een wandeling is via de verbindingen. Graaf G_1 is bijvoorbeeld samenhangend.

Veronderstel nu we hebben een k-reguliere graaf G met verbindingsmatrix A. Dan is elke rijsom (en kolomsom) van A gelijk aan k. Hieruit volgt

$$Aj = kj.$$

Dus k is een eigenwaarde van G met eigenvector j. De volgende stelling laat zien dat k een bijzondere eigenwaarde is.

STELLING 2. Voor een k-reguliere graaf G geldt

i. $\lambda_1 = k$ met eigenvector j,

ii. als G samenhangend is dan heeft k multipliciteit 1, dus $\lambda_2 < k$,

iii. $-\lambda_v \leq k$,

iv. als G bipartiet is, dan is $-\lambda_v = k$.

BEWIJS. (1): Laat $x = (x_1, \ldots, x_v)^t$ een eigenvector zijn voor de eigenwaarde λ. Laat x_p de coördinaat van x zijn die in absolute waarde het grootst is. Vervang x door -x indien $x_p < 0$. Dan geldt het volgende

$$\lambda x_p = (\lambda x)_p = (Ax)_p = a_{p1}x_1 + \ldots + a_{pv}x_v \leqslant$$
$$\leqslant a_{p1}x_p + \ldots + a_{pv}x_p = kx_p \ .$$

Dus $\lambda \leqslant k$ voor elke eigenwaarde λ.

(ii): Stel $\lambda = k$. In bovenstaande afleiding geldt dan gelijkheid, dus moet $x_i = x_p$ als $a_{pi} \neq 0$, ofwel als i en p verbonden zijn. Evenzo moet $x_j = x_i = x_p$ als j en i en i en p verbonden zijn, enzovoort. Dus $x_i = x_p$ voor alle i als G samenhangend is. Maar dan geldt $x = x_p j$. Dus is de multipliciteit van k gelijk aan 1.

(iii): Gebruik makend van $|a_{p1}x_1 + \ldots + a_{pv}x_v| \leqslant a_{p1}|x_1| + \ldots + a_{pv}|x_v|$, maar voor de rest analoog aan (i) vinden we

$$|\lambda| x_p \leqslant k x_p \ .$$

(iv): Als G bipartiet is kunnen we A als volgt nemen

$$A = \begin{bmatrix} O & A_{12} \\ A_{21} & O \end{bmatrix} .$$

Uit $Aj = kj$ volgt $A_{12}j = kj$ en $A_{21}j = kj$. Hiermee vinden we

$$\begin{pmatrix} O & A_{12} \\ A_{21} & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j \\ -j \end{pmatrix} = -k \begin{pmatrix} j \\ -j \end{pmatrix} ,$$

dus $-k$ is eigenwaarde van A.

Een belangrijke stelling over matrices met niet-negatieve elementen is die van Perron-Frobenius. Bovenstaande stelling is een direct gevolg hiervan. Er volgt echter meer. Zo gelden (ii) en (iv) ook omgekeerd: Als $\lambda_2 < k$ dan is G samenhangend, en als $-\lambda_v = k$ dan is G bipartiet.

Met behulp van eigenwaarden kunnen vaak ongelijkheden worden afgeleid met betrekking tot deelstrukturen van een graaf. Een voorbeeld van zo'n deelstructuur is een cokliek. Een *cokliek* (of onafhankelijke verzameling) is een deelverzameling van de punten van een graaf waarbinnen geen punten verbonden zijn. Bijvoorbeeld de punten 0,3,5 en 6 vormen een cokliek in G_1.

STELLING 3. Het aantal punten van een cokliek van een k-reguliere graaf met v punten is ten hoogste gelijk aan

$$v\,\frac{k-\lambda_v}{-\lambda_v}\ .$$

BEWIJS. Laat c het aantal punten van de cokliek zijn. We kunnen de verbindingsmatrix A als volgt nemen

$$A = \begin{pmatrix} O & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

waarin O c rijen en c kolommen heeft. We maken nu de 2 bij 2 matrix B zo dat b_{ij} de gemiddelde rijsom is van A_{ij} en $b_{11} = 0$. De rijsom van A_{12} is k. Het aantal enen in A_{12} is gelijk aan kc. Dus de rijsom van $A_{21} = A_{12}^t$ is gemiddeld $\frac{kc}{v-c}$. De gemiddelde rijsom van A_{21} en A_{22} samen is k, **dus**

$$B = \begin{pmatrix} 0 & k \\ \frac{kc}{v-c} & k-\frac{kc}{v-c} \end{pmatrix}.$$

Nu is er een stelling die zegt dat elke eigenwaarde μ van B voldoet aan

$$\lambda_1 \geqslant \mu \geqslant \lambda_v\ .$$

De eigenwaarden μ_1 en μ_2 van B zijn k en $-\frac{kc}{v-c}$, immers Bj = kj en spoor B = $= \mu_1 + \mu_2 = k - \frac{kc}{v-c}$. De ongelijkheid $\lambda_1 \geqslant k \geqslant \lambda_v$ levert niets op, maar $-\frac{kc}{v-c} \geqslant$ $\geqslant \lambda_v$ leidt tot de gewenste ongelijkheid.

We zullen het nut van dit type ongelijkheden illustreren met een voorbeeld uit de coderingstheorie.

Een ruimteschip zendt op haar reis door het zonnestelsel berichten naar de aarde. Elk bericht is opgebouwd uit rijtjes bits ter lengte n. Door ruis bestaat er een kans dat een bericht fout op aarde aankomt. Daarom gebruikt men voor de berichten niet alle mogelijke 2^n rijtjes, maar slechts een slim gekozen deelverzameling hieruit. Om dit duidelijk te maken definieren we de *afstand* tussen twee rijtjes als het aantal coördinaten waarop ze verschillen. Men kiest nu de zinvolle rijtjes (codewoorden genoemd) zo dat de onderlinge afstand tussen elk tweetal codewoorden tenminste een vast getal d is. Als $d = 3$ bijvoorbeeld betekent dit dat als er een codewoord door ruis op een positie is verminkt, het nog steeds duidelijk is welk codewoord het geweest is. Men zegt dan dat de code één fout kan verbeteren. We maken nu een graaf G. De punten van G zijn alle 2^n rijtjes. Twee punten zijn verbonden als hun afstand kleiner is dan d. De codewoorden vormen dan een cokliek in G. Bijvoorbeeld graaf G_1 is zo'n graaf voor $n = 3$ en $d = 2$. De binaire representaties van de labels geven de bijbehorende rijtjes. Als codewoorden kunnen we dan de punten 0,3,5 en 6 nemen. We stellen ons nu de vraag hoeveel codewoorden er maximaal genomen kunnen worden als $d = 2$ voor willekeurige n. Alle rijtjes met een even aantal enen voldoen. Dit levert 2^{n-1} codewoorden. We zullen met behulp van Stelling 3 laten zien dat het niet beter kan. Behalve alle rijtjes met een even aantal enen zijn ook de rijtjes met een oneven aantal enen onderling niet verbonden. G is dus bipartiet. G is ook k-regulier (met $k = n$). Dus $\lambda_1 = k$ en $\lambda_v = -k$ volgens Stelling 2. Stelling 3 geeft nu dat het aantal codewoorden ten hoogste gelijk is aan

$$v\,\frac{k-(-k)}{-(-k)} = \tfrac{1}{2}v = 2^{n-1}\ .$$

Ook voor $d > 2$ zijn met eigenwaardentechnieken op vergelijkbare manier grenzen af te leiden voor het maximaal aantal codewoorden.

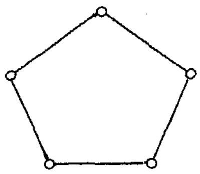
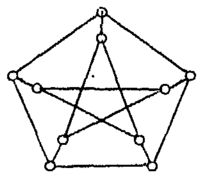
§ 3 MOORE GRAFEN

Een Moore graaf is een k-reguliere graaf die voldoet aan de volgende twee eigenschappen.

i. Voor elk paar verbonden punten bestaat er geen punt dat met beide punten verbonden is.

ii. Voor elk paar niet verbonden punten is er precies één punt met beide punten verbonden.

Deze eigenschappen houden in dat er in maximaal twee stappen van elk punt naar elk ander punt gegaan kan worden, terwijl het totaal aantal verbindingen zo klein mogelijk is. Dergelijke grafen zijn van nut voor telecommunicatienetten waarbij aan de ene kant zuinig moet worden omgesprongen met transmissiemiddelen, terwijl aan de andere kant het aantal tussenstations klein moet zijn. Voorbeelden van Moore grafen zijn:

De tweede graaf staat bekend als de *Petersen graaf*.

Het is niet moeilijk in te zien dat het aantal punten van een Moore graaf gelijk is aan k^2+1. We laten dit als oefening over aan de lezer. De stelling waaraan deze paragraaf is gewijd zegt dat er maar weinig Moore grafen zijn.

STELLING 4. Voor een Moore graaf geldt $k = 1, 2, 3, 7$ of 57.

BEWIJS. Laat A de verbindingsmatrix zijn van een Moore graaf G. Dan geldt

(1) $$Aj = kj.$$

Verder is $(A^2)_{ij} = (AA^t)_{ij}$ het inwendig product van rij i en rij j van A en dus gelijk aan het aantal punten dat met i èn j verbonden is. Hieruit volgt

$$A^2 = J - A - I + kI = J - A + (k-1)I .$$

Dit is te herschrijven als

(2) $$(A - s_1 I)(A - s_2 I) = J \ , \text{ met } s_{1,2} = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{4k-3} .$$

Uit (1) en (2) volgt

(3) $$(A - s_1 I)(A - s_2 I)(A - kI) = 0 .$$

Dit betekent dat s_1, s_2 en k de enige mogelijke eigenwaarden van A zijn. Inderdaad, vermenigvuldig (3) rechts met een eigenvector x behorend bij een eigenwaarde λ, dan volgt

$$(\lambda - s_1)(\lambda - s_2)(\lambda - k) = 0 .$$

Dus $\lambda = s_1$, $\lambda = s_2$, of $\lambda = k$. De multipliciteit van k is gelijk aan 1, zoals bijvoorbeeld volgt uit Stelling 2. Laat m_1 en m_2 de multipliciteiten zijn van s_1 en s_2 respectievelijk. De som der multipliciteiten is het aantal punten van G. Dus

$$m_1 + m_2 + 1 = k^2 + 1 \ . \tag{4}$$

De som der eigenwaarden is gelijk aan spoor A = 0, dus

$$m_1 s_1 + m_2 s_2 + k = 0 \ . \tag{5}$$

Uit (4) en (5) volgt

$$m_2(s_2 - s_1) = -k - s_1 k^2 \ .$$

Substitutie van s_1 en s_2 en vermenigvuldigen met $\sqrt{4k-3}$ leidt tot

$$2m_2(4k-3) = k(\sqrt{4k-3}(k-2) + k(4k-3)) \ . \tag{6}$$

Daar $2m_2(4k-3)$ een geheel getal is, geldt $k = 2$ of $4k-3$ is een kwadraat. Noem $4k-3 = w^2$, dan is $k = \frac{1}{4}(w^2+3)$. Uit formule (6) volgt dan

$$32m_2 w = (w^2+3)(w^2-5+4kw) = w^4+4kw^3-2w^2+12kw-15 \ .$$

Dus w is een deler van 15. Daarom is w = 1, 3, 5 of 15 en dus k = 1, 3, 7, of 57. Samen met de eerder gevonden mogelijkheid k = 2 levert dit de bewering van de stelling.

Voor k = 1, 2, 3 en 7 is bekend dat een Moore graaf bestaat. Voor k = 1, 2 en 3 zijn dit: twee verbonden punten, de vijfhoek en de Petersen graaf, respectievelijk. Ook is bekend dat er voor k = 1, 2, 3 en 7 maar precies een Moore graaf bestaat. Het bestaan van een 57-reguliere Moore graaf echter is nog een onopgelost probleem.

Tot slot merken we op dat grafen met veel structuur zoals Moore grafen erg belangrijk zijn voor de bestudering van eindige groepen. Stelling 4 heeft dan ook gevolgen in de groepentheorie.

REFERENTIES

Voor verdere bestudering van dit onderwerp wordt verwezen naar de volgende boeken.

1. N.L. Biggs, *Algebraic Graph Theory*, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1974.
2. P.J. Cameron & J.H. van Lint, *Graphs, Codes and Designs*, London Math. Soc. Lecture Notes 43, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1980.
3. D.M. Cvetcović, M. Doob & H. Sachs, *Spectra of Graphs*, Academic Press, New York 1980.
4. W.H. Haemers, *Eigenvalue Techniques in Design and Graph Theory*, Math. Centre Tract 121, Mathematisch Centrum, Amsterdam 1980.