Les systèmes non linéaires à plus d'entrées que de sorties ne sont pas inversibles

Nijmeijer, N.; Schumacher, J.M.

Published in:
Comtes Rendus de l' Academie des Sciences Paris

Publication date:
1984

AUTOMATIQUE THÉORIQUE. — Les systèmes non linéaires à plus d'entrées que de sorties ne sont pas inversibles.

Note de **Henk Nijmeijer** et **Hans Schumacher**, présentée par Bernard Picinbono.

Remise le 21 mai 1984, acceptée le 24 septembre 1984.

Considérons un système non linéaire du type affine dont le nombre d'entrées est plus grand que le nombre des sorties. On montre qu'un tel système n'est jamais inversible à gauche. Ce résultat est une extension directe du même résultat bien connu pour les systèmes linéaires.

AUTOMATION (THEORETICAL). — Non-Linear Systems with More Inputs than Outputs are not Invertible.

It is shown that an affine nonlinear control system of which the number of inputs exceeds the number of outputs is never invertible. This result is a direct extension of the same result for linear systems, which is well known.

INTRODUCTION. — Considérons le système non linéaire de type affine, donné par :

$$\dot{x}(t)=A(x(t))+\sum_{i=1}^{m} B_i(x(t))\,u_i(t), \qquad x(0)=x_0\in M, \tag{1}$$

où x représente les coordonnées locales d'une variété analytique M, de dimension n; les A, $B_1, \ldots, B_m$ sont des champs de vecteurs analytiques sur M; et la fonction d'entrée $u(t)=(u_1(t), \ldots, u_m(t))^T$ appartient à l'ensemble U des fonctions analytiques de $[0, \infty)$ dans $\mathbb{R}^m$. Adjoint à la loi dynamique (1), considérons un ensemble de sorties $y(t)=(y(t), \ldots, y_p(t))^T$ données par :

$$y_i(t)=c_i(x(t)), \qquad i=1, \ldots, p, \tag{2}$$

où $c_i : M \to \rho$ est une fonction analytique pour $i=1, \ldots, p$.

Dans cette Note, on étudie la notion d'inversibilité à gauche, introduite par Hirschorn ([1], [2]). Le système (1)-(2) est *inversible (à gauche) en* $x_0\in M$ si, dans tous les cas où u et $\hat{u}$ sont des commandes admissibles distinctes, les sorties correspondantes $y(., u, x_0)$ et $y(., \hat{u}, x_0)$ sont différentes. Le système est *fortement inversible en* x_0 si le système est inversible en chaque point x dans un certain voisinage V de x_0, et le système est dit *fortement inversible* s'il existe une sous-variété M', ouverte et dense dans M, telle que le système soit fortement inversible en tout $x_0\in M'$. Dans un travail précédent [6], on a donné des conditions nécessaires et suffisantes pour l'inversibilité forte. Néanmoins les résultats de [6] n'ont qu'un intérêt théorique, puisqu'il manque une méthode constructive pour décider de l'inversibilité. Cette Note présente une procédure constructive qui montre que le système (1)-(2) n'est jamais inversible si le nombre m des entrées est plus grand que celui p des sorties. Ce résultat, qui est bien connu pour les systèmes linéaires, répond à une question posée par M. Fliess dans une conversation avec un des auteurs. Notre approche est basée sur les méthodes récentes pour traiter des systèmes non linéaires par la géométrie différentielle (*voir*, par exemple, [3]-[8]). On établit le résultat cité d'abord pour les cas d'une seule sortie ($p=1$) dans le paragraphe qui suit, et on traite le cas général $m>p$ dans le paragraphe 3.

2. CAS D'UNE SEULE SORTIE. — Considérons le système (1) avec une sortie scalaire :

$$y(t)=c(x(t)). \tag{3}$$

Définissons la distribution engendrée par les champs de vecteurs d'entrée :

$$\Delta_0=\operatorname{span}\{B_1, \ldots, B_m\}. \tag{4}$$

0249-6321/84/02990791 $ 2.00

On a le lemme suivant :

LEMME. — *Le système* (1) *avec la fonction de sortie* (3) *n'est pas fortement inversible si* $m>1$.

Ce lemme est crucial : nous en indiquons la démonstration.

Définissons la distribution involutive, de dimension $n-1$, $K=\operatorname{Ker} C_*$. L'élément suprémal de l'ensemble des distributions localement invariantes en commande et contenues dans K (*voir* [3]) est noté V_K^*. On l'obtient comme limite de la suite :

$$\left\{\begin{array}{l} V^1=K, \\ V^{\mu+1}=K \cap \{ X \in V^\omega(M) \mid [A, X] \in \Delta_0+V^\mu, [B_i X] \in \Delta_0+V^\mu, i \in \mathbf{m} \}. \end{array}\right. \tag{5}$$

Il a été montré en [8] que les V^μ sont involutives et de dimension fixée sur une sous-variété ouverte et dense M' de M. Montrons que :

$$d(V_K^* \cap \Delta_0) \geqq m-1; \tag{6}$$

cela suffira à établir le lemme. En effet, si on a (6), alors on sait (*voir* [5]-[8]) que $V_K^* \cap \Delta_0 = R_K^* \cap \Delta_0$, où R_K^* signifie la distribution de commandabilité locale régulière suprémale dans K (*voir* [5]). Par conséquent, on a $d(R_K^* \cap \Delta_0) \geqq m-1>0$ et le résultat découle de [6].

Pour établir (6), on fait l'observation suivante :

Supposons que, pour un certain $k \in \mathbb{N}$, V^k est égal à la k-ième *distribution d'inobservabilité* (*voir* [7]), c'est-à-dire :

$$V^K = \operatorname{Ker} dc \cap \operatorname{Ker} dL_A c \cap \ldots \cap \operatorname{Ker} dL_A^{k-1} c \tag{7}$$

(où L_A^i signifie : prendre la dérivée de Lie i fois relativement au champ de vecteurs A), et :

$$V^k \supset \Delta_0. \tag{8}$$

Alors V^{k+1} est égal à la $(k+1)$-ième distribution d'inobservabilité. En effet, de l'algorithme (5) on voit, en tenant compte de (8), que :

$$V^{k+1} = K \cap \{ X \in V^\omega(M) \mid [A, X] \in V^k \}. \tag{9}$$

D'où (*voir* [7]) :

$$V^{k+1} = \operatorname{Ker} dc \cap \operatorname{Ker} dL_A c \cap \ldots \cap \operatorname{Ker} dL_A^k c. \tag{10}$$

Il y a donc deux possibilités : soit l'équation (8) est valable pour toute $k>0$, soit il existe un $\bar{k} \in \mathbb{N}$ minimal tel que (8) ne vaut pas. Dans le premier cas, on a certainement :

$$V_K^* \supset \Delta_0 \tag{11}$$

et alors $d(V_K^* \cap \Delta_0)=m$. Dans le deuxième cas, on a $V^i \supset \Delta_0$ pour tout $i \in \bar{k}-1$, et par conséquent l'observation ci-dessus implique que :

$$V^{\bar{k}} = K \cap \{ X \in V^\omega(M) \mid [A, X] \in V^{\bar{k}-1} \}. \tag{12}$$

Par considération des dimensions, on en déduit que $V^{\bar{k}}+\Delta_0=V^{\bar{k}-1}$, et donc [*voir* (5)] que $V^{\bar{k}+1}=V^{\bar{k}}$. Ceci entraîne que $V_K^*=V^{\bar{k}}$ et

$$d(V_K^* \cap \Delta_0)=m-1, \tag{13}$$

ce qui vérifie le lemme.

On voit que la dimension de $V_K^* \cap \Delta_0$ est égale à m ou à $m-1$. Dans le premier cas, la fonction de sortie et toutes ses dérivées ne dépendent pas des entrées.

Autrement dit, le nombre caractéristique n'est pas fini. Définissons la *distribution de commandabilité* (*voir* aussi [5]) :

$$R^* = \text{fermeture involutive de } \{ ad_A^k B_i \mid k \geqq 0, i \in m \}, \tag{14}$$

alors :

(15) $$R^* \subset V_K^* \subset \operatorname{Ker} C_*,$$

d'autre part si $\dim (V_K^* \cap \Delta_0) = m-1$, le système est *contrôlable à la sortie*, c'est-à-dire $c_* R^* = T\mathbb{R}$ (*voir* [8]).

3. CAS GÉNÉRAL. — Dans le cas général, on a le résultat suivant.

THÉORÈME. — *Le système non linéaire* (1)-(2) *n'est pas fortement inversible à gauche si* $m > p$.

La démonstration se fait par application répétée du lemme précédent. On considère d'abord le système (1) avec la fonction de sortie :

(16) $$y_1 = c_1 (x).$$

Alors, il découle du lemme que :

$$d (V_{K_1}^* \cap \Delta_0) \geqq m-1,$$

où $K_1 = \operatorname{Ker} c_{1*}$. Les distributions $V_{K_1}^*$ et $V_{K_1}^* \cap \Delta_0$ sont de dimension fixée sur une sous-variété ouverte et dense M' de M. On va montrer que le système n'est pas inversible sur M'. Supposons que $d (V_{K_1}^* \cap \Delta_0) = m-1$. Par la définition de la notion de l'invariance de commande locale, il existe — localement dans un voisinage de chaque point $x_0 \in M'$ — une fonction de bouclage $\alpha : M' \to \mathbb{R}^m$ telle que $V_{K_1}^*$ soit une distribution invariante pour :

(18) $$A^1 (x) := A (x) + \sum_{i=1}^{m} B_i (x)\, \alpha_i (x),$$

c'est-à-dire (*voir* [3]-[4]) :

(19) $$[A^1, V_{K_1}^*] \subset V_{K_1}^*.$$

Écrivons $\Delta_0^1 = V_{K_1}^* \cap \Delta_0$; soit $\{ B_1^1, \ldots, B_{m-1}^1 \}$ une base pour Δ_0^1. Considérons le système :

$$\dot{x} = A^1 (x) + \sum_{i=1}^{m-1} B_i^1 (x)\, u_i.$$

On note que la distribution de commandabilité de ce système, définie à la manière de (14), est contenue dans $V_{K_1}^*$.

Dans la deuxième étape, on considère le système (20) avec la fonction de sortie :

(21) $$y_2 = c_2 (x).$$

Par une nouvelle application de lemme, on obtient :

(22) $$d (\tilde{V}_{k_2}^* \cap \Delta_0^1) \geqq m-2,$$

où $K_2 = \operatorname{Ker} c_{2*}$ et $\tilde{V}_{K_2}^*$ est le plus grand élément de l'ensemble des distributions localement invariantes en commande et contenues dans K_2 [relativement au système (20)]. Notons que, en général, $\tilde{V}_{k_2}^*$ *n'est pas une* distribution *localement invariante en* commande *relativement au* système *original* (1). *En supposant que* $d (\tilde{V}_{K_2}^* \cap \Delta_0) = m-2$ on construit, comme il a été fait ci-dessus, un nouveau système :

(23) $$\dot{x} = A^2 (x) + \sum_{i=1}^{m-2} B_i^2 (x)\, u_i,$$

où $\{B_1^2, \ldots, B_{m-2}^2\} = \Delta_0^2 \equiv \tilde{V}_{K_2}^* \cap \Delta_0^1$, et $[A^2, \tilde{V}_{K_2}^*] \subset \tilde{V}_{K_2}^*$. Puisque la distribution de commandabilité de (20) est contenue dans $V_{K_1}^* \subset K_1$, la même propriété est aussi valable pour le système (23). En outre la distribution de commandabilité de (23) est contenue dans K_2, donc les sorties y_1 ainsi que y_2 et toutes ces dérivées sont indépendantes des entrées $u_1, \ldots, u_{u-2}$ qui figurent dans (23); *voir* la remarque à la fin du paragraphe précédent.

Par répétition du raisonnement ci-dessus, on arrive après p étapes à un sous-système :

$$\dot{x} = A^p(x) + \sum_{i=1}^{m-p} B_i^p(x)\, u_i, \tag{24}$$

dont les entrées n'ont pas d'effet sur les sorties $y_1, \ldots, y_p$. Par conséquent, la distribution de commandabilité du système (25) (qui n'est pas nul) est contenue dans $\operatorname{Ker} c_{1*} \cap \ldots \cap \operatorname{Ker} c_{p*}$. Il découle de [6] que le système original (1)-(2) n'est pas fortement inversible.

Ajoutons deux remarques. En général, les distributions $V_{K_i}^*$ $(i=1, 2, \ldots, p)$, qui figurent dans la démonstration du théorème, ne sont pas localement invariantes en commande relativement au système original (1). C'est la différence entre invariance en commande *régulière* et *dégénérée* qui joue un rôle essentiel ici, *voir* [4], [5]. Enfin, notons que le nombre des fonctions d'entrée ineffectives dans le système modifié (24) est au moins égal à $m-p$. Si, en une étape, on a $d(V_{K_i}^* \cap \Delta_0^{i-1}) = m-i+1$ $(i=1, \ldots, p)$, ce nombre sera même plus grand.

Références bibliographiques

[1] R. M. Hirschorn, Invertibility of Nonlinear Control Systems, *S.I.A.M. J. Control Optim.*, 17, 1979, p. 289-297.

[2] R. M. Hirschorn, Invertibility of Multivariable Nonlinear Control Systems, *I.E.E.E. Trans. Autom. Control*, 24, 1979, p. 855-865.

[3] H. Nijmeijer, Controlled Invariance for Affine Control Systems, *Intern. J. Control*, 34, 1981, p. 824-833.

[4] H. Nijmeijer et A. J. van der Schaft, Controlled Invariance for Nonlinear Systems, *I.E.E.E. Trans. Autom. Control*, 27, 1982, p. 904-914.

[5] H. Nijmeijer, Controllability Distributions for Nonlinear Control Systems, *Syst. Control Lett.*, 2, 1982, p. 122-129.

[6] H. Nijmeijer, Invertibility of Affine Nonlinear Control Systems: a Geometric Approach, *Syst. Control Lett.*, 2, 1982, p. 163-168.

[7] H. Nijmeijer, Observability of a Class of Nonlinear Systems: a Geometric Approach, *Ricerche di Automatica*, 12, 1981, p. 1-19.

[8] H. Nijmeijer et J. M. Schumacher, *Zeros at infinity for Affine Nonlinear Control Systems*, Memo 427, Dep. Appl. Math., Technical University Twente, 1983.

H. N. : *Onderafdeling der Toegepaste Wiskunde, Technische Hogeschool Twente*, Postbus 217, 7500 *A.E. Enschede, Pays-Bas;*
J. M. S. : *E.S.T.E.C.-T.M.M.*, *Postbus* 299, 2200 *A.G. Noordwijk, Pays-Bas.*