TOETSENBOEK

statistische toetsen

Theo M.M. Verhallen

VoorwoordVoorwoord

**Wanneer moet ik een bepaalde statistische toets gebruiken?
En hoe moet ik die uitvoeren?
Daarover gaat dit toetsenboek.
In statistische handboeken staat de theorie centraal: kanstheorie, steekproeftheorie, het afleiden van formules.In dit toetsenboek staat de praktijk centraal: het gebruik van toetsen, de keuze van de juiste toets en de uitleg van principes voor zover nodig voor het correct gebruik en toepassen van statistische toetsen. Aan de hand van voorbeelden uit de bedrijfspraktijk, vooral de marketing en het marktonderzoek, worden alle toetsen en associatiematen gedemonstreerd.
Een kookboek voor student en onderzoeker.
Hopelijk een bruikbare gids voor studie en praktijk.**

Theo M.M. Verhallen

hoogleraar marketing en marktonderzoek

januari 1994, Tilburg

Inhoudsopgave

1. Univariate analyses: enkele uitgangspunten

1.1 Meetniveaus

Het doen van onderzoek omvat twee hoofdactiviteiten: allereerst het **meten en verzamelen** van data, ten tweede het **beschrijven en analyseren** van deze data.
Meten is het toekennen van getallen aan data volgens bepaalde regels. Deze weergave van data door middel van getallen maakt het ons mogelijk rekenkundige bewerkingen op die getallen toe te passen zoals optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen.

Schema I MEETNIVEAUS

Nominale schaal	Het laagste meetniveau is het nominale of classificatieniveau, welke bestaat uit het eenvoudig classificeren van observaties in categorien. Getallen dienen hierbij als 'labels' ter identificatie van categorieën of klassen. Deze categorieën moeten elkaar wederzijds uitsluiten. Veel demografische data zijn van deze soort. De enig toegestane wiskundige bewerking op dit soort data is het tellen van de observaties met hetzelfde nummer of toebehorend aan dezelfde categorie.
Ordinale schaal	Ordinale data onderscheiden zich van nominale data door hun additionele eigenschap, namelijk die van een rangorde van de categorieën. Dat wil zeggen: de categorieën kunnen worden geïdentificeerd als zijnde hoger of lager dan de daarnaast gelegen categorie. Echter niets wordt gespecificeerd met betrekking tot de grootte van het interval tussen twee categorieën. Een gangbaar voorbeeld is de attitude schaal, waarbij mensen aangeven in welke mate zij het eens zijn met een 'item' (stelling): geheel mee eens; mee eens; mee oneens; geheel mee oneens. We kunnen respectievelijk de getallen 1, 2, 3 en 4 toekennen aan de verschillende categorieën. Maar de nummers 3, 8, 22 en 107 voor deze getallen hebben dezelfde eigenschap van volgorde. Alleen die transformaties zijn toegestaan die de rangordening van de categorieën intact laten.
Interval schaal	Een interval schaal onderscheidt zich van een ordinale schaal door de gelijke intervallen tussen de meeteenheden. Dit wil dus zeggen dat het getal 3 halverwege het getal 2 en 4 gelegen is. Voorbeelden van data op deze schaal zijn: temperatuur metingen met Fahrenheit- en Celsius-thermometers of scores op een intelligentie test. In het laatste geval nemen we gelijke meeteenheden aan. Het nulpunt wordt bij conventie gedefini-

	eerd, geen absoluut nulpunt is te bepalen. Op getallen, die door middel van deze schaal zijn toegewezen, zijn de meest gangbare rekenkundige bewerkingen zoals optellen, aftrekken, toegestaan.
Ratio schaal	Het hoogste niveau van meten; ratio schalen hebben alle eigenschappen van de interval schalen, en tevens de additionele eigenschap van het absolute nulpunt. Een nulscore op een hoogte of een lengte schaal betekent bijgevolg de afwezigheid van die kwaliteit; in tegenstelling tot nul-scores (bijvoorbeeld graden Fahrenheit) op een interval schaal. Zowel de interval alsmede de ratio schaal hebben een gedefinieerde meeteenheid (graden, meters etc.) en worden daarom ook wel metrisch- of parametrisch genoemd. Voor statistische doeleinden is het verschil tussen interval en ratio schaal niet relevant, daarom zullen beiden in het vervolg als gelijk worden behandeld en als metrisch worden aangeduid.

Er zijn echter verschillende soorten data die elk hun eigen regels kennen voor wat betreft de getallen die mogen worden toegekend en de wiskundige bewerkingen die mogen worden toegepast. Het is gebruikelijk in dit kader data aan de hand van hun meetniveau in te delen in nominale, ordinale, intervalgeschaalde en ratio-geschaalde data (zie schema I).

1.2 Statistische kengetallen en steekproeftrekkingen

Na het verzamelen van waarnemingen en het toekennen van getallen kunnen statistische kengetallen worden berekend. Die statistische kengetallen hebben voor de onderzoeker twee doelen: een **beschrijvend** doel en een **inferentieel** doel.

Statistiek is beschrijvend in die zin dat zij grote hoeveelheden informatie kan samenvatten en statistiek is inferentieel omdat zij een methode verschaft om:

1. populatiekenmerken te schatten op basis van een verhoudingsgewijs gering aantal waarnemingen en omdat zij ons in staat stelt:
2. tot het generaliseren van resultaten uit experimenten.

De fundamentele eenheid waarop statistiek wordt toegepast is de **populatie**. Terwijl in het gangbare taalgebruik het begrip populatie verwijst naar een groep van mensen, wordt in de statistiek een groep van dingen (waaronder mensen) bedoeld.

Definitie:

> **een populatie is de verzameling van alle entiteiten die toebehoren aan een bepaalde groep mensen, objecten of gebeurtenissen.**

Een populatie kan zowel eindig als oneindig zijn; reëel of abstract. Bij een **eindige populatie** kunnen alle entiteiten worden geteld; bij een **oneindige populatie** kan dit niet. "Alle geregistreerde stemmers van deelgemeente Buitenveldert in Amsterdam" is een voorbeeld van een eindige populatie. "De kubieke meters lucht binnen een straal van drie kilometer rondom Rotterdam" is een voorbeeld van een oneindige populatie. Beide populaties zijn **reëel**. Dat wil zeggen dat zij een fysieke realiteit hebben. De gemiddelde leeftijd van alle steekproeven van 100 geregistreerde kiezers en de gemiddelde hoeveelheid stikstof per kubieke meter lucht zijn voorbeelden van **abstracte** populaties. Hoewel eindig, zijn binnen de statistische analyses vele populaties, bijvoorbeeld de bevolking van Nederland, voldoende groot om als oneindig te worden behandeld.
Statistiek is in die zin **beschrijvend** dat zij data over de populatie condenseert in een eenvoudiger te begrijpen vorm. Zo kan bijvoorbeeld een onderzoeker in plaats van het presenteren van de namen en de leeftijd van alle geregistreerde kiezers in Buitenveldert een conceptueel bruikbaar kengetal berekenen, zoals de gemiddelde leeftijd van de geregistreerde kiezers.
Statistische kengetallen die de data van een gehele populatie condenseren worden ook wel **parameters** genoemd en worden meestal middels Griekse letters weergegeven. Bijvoorbeeld: μ wordt gebruikt om het populatiegemiddelde weer te geven en σ^2 om de populatievariantie te beschrijven. Om het inferentiële doel van statistiek te begrijpen is het noodzakelijk het nut van steekproeftrekken te onderkennen. Over het algemeen bent u als onderzoeker immers geïnteresseerd in de kenmerken van of oneindige of erg grote eindige populaties en is het u onmogelijk ieder lid van die populatie te observeren of te onderzoeken.

2. Univariate beschrijving: enkele kengetallen2. Univariate beschrijving: enkele kengetallen

In dit hoofdstuk bespreken wij op een kookboekachtige manier de kengetallen waarmee u univariate data kunt beschrijven. De statistisch noodzakelijke basis vindt u in een inleidend statistiekboek. Alle niet strikt noodzakelijke theoretische verklaringen blijven hier achterwege.

De meest gangbare manier om een groep metingen of scores op een variabele te beschrijven is door middel van **centrale tendentie-maatstaven**. Gewoonlijk worden drie soorten maatstaven in dit kader onderscheiden: **het gemiddelde, de mediaan en de modus**. Ieder van deze maatstaven levert een enkelvoudige numerieke waarde die een groep van metingen weergeeft en inzicht geeft in de centrale tendentie van de scores.
Een tweede manier om metingen op een variabele te beschrijven is door middel van **spreidingsmaatstaven**, die aangeven op welke wijze de scores zijn gespreid rondom een centraal punt. Daartoe behoren **de range, de interkwartiel afstand, de variantie en de standaarddeviatie**.

Tabel 1. Univariate beschrijvende kengetallen

Maatstaf voor:	Meetniveau:		
	Nominaal	Ordinaal	Metrisch (interval en ratio)
centrale tendentie	**modus**	modus; **mediaan**	modus; mediaan; **gemiddelde**
spreiding, variabiliteit		range; **inter-kwartiel af-stand**	range; interkwartiel afstand; gemiddelde deviatie; variantie; **standaarddeviatie**

In tabel 1 treft u de meest gangbare maatstaven voor centrale tendentie en spreiding. Voor elk meetniveau is aangegeven welke maatstaven u mag gebruiken. De in de cellen vet gedrukte maatstaven zijn het meest krachtig en het meest gebruikt voor die situatie.

Operationele definities:

Modus de klasse of waarde met de hoogste frequentie

Mediaan het punt in de frequentieverdeling waaronder en waarboven een gelijk aantal waarnemingen te vinden is (50% punt)

Gemiddelde de som van alle scores gedeeld door het aantal scores

Range het verschil tussen de hoogste en de laagste score in een steekproef

Interkwartiel afstand het verschil tussen het 75% punt en het 25% punt van een verdeling

Gemiddelde deviatie het gemiddelde van de absolute waarden van de deviatiescores

Variantie het gemiddelde van de gekwadrateerde deviaties van het gemiddelde

Standaarddeviatie de vierkantswortel van de variantie.

VOORBEELD

Stel dat we de volgende scores (N=20) op een ratioschaal hebben.

Scores (X_i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Frequentie (f_i)	1	1	2	2	4	3	3	3	1
Cumulatieve frequentie (F_i)	1	2	4	6	10	13	16	19	20

Dan geldt in dit voorbeeld:

* Modus = 5 (de frequentie van deze score = 4 is immers het hoogst).

* Mediaan = 5,5 (de helft van de scores is hoger en de helft is lager dan dit punt). De mediaan is het 50-ste centiel punt. De algemene formule voor een centiel punt is:

(1.1) Voor ieder centiel punt geldt = Install Equation Editor and double-click here to view equation. **1 waarbij:**

EB = de exacte benedengrens van het interval waarbinnen we interpoleren

N = het aantal waarnemingen

p = de proportie die correspondeert met het gewenste centiel punt, voor de mediaan is dit 1/2

cf = cumulatieve frequentie van de waarnemingen die onder het interval vallen waarin we interpoleren

i = de grootte van het klasse-interval

fi = frequentie intervalscore

Toepassing van (2.1) levert voor de mediaan:

= 5.5 + Install Equation Editor and double-click here to view equation. **2**

(N.B. Het exacte interval van de score 6 is 5.5 tot 6.5 waardoor de ondergrens 5.5 is).

Voor het derde kwartiel geldt dan:

* **de gemiddelde deviatie**

de berekening van de gemiddelde deviatie gaat als volgt:

(2.3) gemiddelde deviatie = Install Equation Editor and double-click here to view equation. **3**

Install Equation Editor and double-click here to view equation. **4**

Install Equation Editor and double-click here to view equation. **5**

(2.4) variantie = Install Equation Editor and double-click here to view equation. **6**

Install Equation Editor and double-click here to view equation. **7**

(2.5) standaarddeviatie = S = Install Equation Editor and double-click here to view equation. **8**

3. Het toetsen van univariate hypothesen3. Het toetsen van univariate hypothesen

3.1 Inleiding.1 Inleiding

De grootste waarde van de statistiek is gelegen in de mogelijkheid die zij ons biedt conclusies te trekken uit de kenmerken van de gemeten waarnemingen. We zullen ons hier met name bezighouden met het toetsen van **de significantie van verschillen** in geval van 1 alsmede van 2 steekproeven waarin slechts één variabele is gemeten.
In het **geval van één steekproef** zijn de daarbij behorende toetsen van het "goodness-of-fit" type. Dat wil zeggen dat de geobserveerde verdeling wordt vergeleken met een onder de hypothese verwachte verdeling.
In het **geval van twee steekproeven** worden de verschillen tussen de twee verdelingen getoetst.
Zoals uit tabel 2 blijkt is de keuze van het type toets afhankelijk van **het meetniveau** van de variabelen die worden bestudeerd c.q. onderzocht en van **het soort steekproef**. In het hierna volgende worden de stappen beschreven die noodzakelijk zijn om tot een keuze van de juiste univariate toets te komen.

3.2 Fasen in de keuze van de meest geschikte toets.2 Fasen in de keuze van de meest geschikte toets

1. **Bepaal het meetniveau van de gemeten variabele**
   Dit geeft u een ingang in een van de 3 kolommen van tabel 2. Realiseer u dat het is toegestaan om binnen dezelfde rij een toets te kiezen die betrekking heeft op een lager meetniveau. Met andere woorden: wanneer u een metrische variabele heeft is het toegestaan om een toets te kiezen die een ordinaal of nominaal meetniveau vereist. U moet daarbij wel in overweging nemen dat u informatie verliest wanneer u tot een dergelijke stap besluit. De getallen worden behandeld volgens het lagere meetniveau in de toets.
2. **Bepaal het soort steekproef**
   Kies een toets uit de eerste rij van tabel 2 als er sprake is van **één steekproef**, dus van één rij getallen zoals die van een frequentieverdeling, een rangordening of een 'set' van scores op een test.
   Kies een toets uit de tweede rij van tabel 2 wanneer u **twee afhankelijke steekproeven** heeft. Twee steekproeven worden afhankelijk genoemd wanneer iedere persoon in de ene steekproef kan worden gekoppeld aan een persoon in de tweede steekproef omdat zij "gematched" zijn op een aantal criteria of omdat aan dezelfde steekproef tweemaal metingen zijn verricht, zoals dat gebeurt in een "before - after" design.

Kies een toets uit de derde rij van tabel 2, wanneer u twee onafhankelijke steekproeven heeft, dat wil zeggen: niet "gematchte" individuen in de beide steekproeven.

Tabel 2. Typen van univariate toetsen

	meetniveau variabele		
steekproefsoort	nominaal	ordinaal	metrisch
een steekproef	binominale toets Z-toets χ^2-toets toets voor gecorreleerde percentages/proporties (Hoofdstuk 4)	Kolmogorov-Smirnov one-sample toets (Hoofdstuk 7)	Z-toets (Hoofdstuk 10)
twee afhankelijke steekproeven bijv. vóór - na meting	McNemar's toets voor de significantie van verandering (Hoofdstuk 5)	Tekentoets Toets van Wilcoxon (Hoofdstuk 8)	T-toets Variantie-toets (Hoofdstuk 11)
twee onafhankelijke steekproeven	Fisher's toets Chi-kwadraat-toets Test voor de percentages/ proporties van onafhankelijke steekproeven (Hoofdstuk 6)	Mediaantoets Mann-Whitney-U-toets Kolmogorov-Smirnov-two-sample toets (Hoofdstuk 9)	gelijke varianties T-toets Variantietoets Verschillende varianties (Hoofdstuk 11)

3. **Kies een geschikte toets**

Als u de stappen 1 en 2 heeft gevolgd, komt u uiteindelijk in een van de negen cellen van tabel 2.
Vaak heeft u binnen de gekozen cel nog één of meer opties. In dat geval kiest u overeenkomstig de hierna beschreven regels.
In de genoemde hoofdstukken vindt u nadere bijzonderheden.

3.3 Opsomming van de diverse toetsen.3 Opsomming van de diverse toetsen

HOOFDSTUK 4

Nominale data en één steekproef

1. Wanneer u een nominale variabele heeft met slechts **twee posities die elkaar wederzijds uitsluiten** (zoals het aantal mannen en vrouwen, het aantal kopers en niet-kopers) kies dan:
   - in geval van kleine steekproeven: de binominale toets
   - in geval van grote steekproeven: de Z-toets.

   Zie hoofdstuk 4 voor de criteria voor de keuze tussen deze twee.
2. Wanneer u **frequenties** heeft van nominale data met **meer dan twee posities** kies dan de χ^2-toets voor **één steekproef**.
3. Wanneer u percentages of proporties heeft van nominale data met **meer dan twee posities** en u wilt het verschil tussen twee van de percentages of proporties toetsen, kies dan tussen de twee percentagetoetsen voor gecorreleerde percentages. Wanneer de percentages optellen tot 100 is het mogelijk, maar niet noodzakelijk, om de absolute waarden te herberekenen en de χ^2-toets voor één steekproef te gebruiken.

HOOFDSTUK 5

Nominale data en twee afhankelijke steekproeven

Kies de McNemar's toets voor het toetsen van de significantie van veranderingen.

HOOFDSTUK 6

Nominale data en twee onafhankelijke steekproeven

- kies in geval van een kleine steekproef Fisher's toets.
- kies voor χ^2-toets met Yate's continuïteitscorrectie wanneer u een middelgrote steekproef heeft.
- kies voor de χ^2-toets wanneer u grote steekproeven heeft. Zie voor de exacte keuzecriteria tussen deze drie testen hoofdstuk 6.
- wanneer u over percentages van twee onafhankelijke steekproeven beschikt, kies dan voor de percentagetoets voor onafhankelijke steekproeven.

HOOFDSTUK 7

Ordinale data en één steekproef

Kies voor de Kolmogorov-Smirnov toets voor één steekproef.

HOOFDSTUK 8

Ordinale data en twee afhankelijke steekproeven

Zowel de tekentoets alswel de Wilcoxon-toets zijn toepasbaar wanneer u twee afhankelijke steekproeven heeft die paarsgewijs kunnen worden vergeleken.

- U dient de tekentoets te kiezen wanneer alleen de richting van de verschillen tussen paren kan worden bepaald. Dat wil zeggen wanneer de verschillen alleen maar kunnen worden geïnterpreteerd als positief, negatief of nul.
- Wanneer zowel de relatieve omvang alsmede de richting van de verschillen kan worden bepaald, kies dan voor de meer krachtige Wilcoxon-toets. Deze toets kent een groter gewicht toe naarmate de verschillen tussen paren binnen dezelfde conditie groter zijn.

HOOFDSTUK 9

Ordinale data en twee onafhankelijke steekproeven

- Kies voor de mediaantoets wanneer u haast heeft of in een situatie verkeerd waarbinnen een ruwe schatting voldoende is. De mediaantoets is minder krachtig (met name in geval van grote steekproeven) dan de andere twee mogelijke toetsen omdat zij niet alle kenmerken van de verdeling in overweging neemt: de Mann-Whitney-U-toets en de Kolmogorov Smirnov-toets doen dat wel.
- In termen van kracht bestaat er niet zo veel verschil tussen de Mann-Whitney-U-toets en de Kolmogorov-Smirnov-toets: echter bij grote steekproeven blijkt de eerste en voor kleine steekproeven de tweede beter te voldoen. Daarom wordt uit praktische overwegingen het volgende geadviseerd: wanneer u één variabele heeft met maar enkele scoreposities, zoals een attitude schaal, gebruik dan de Kolmogorov-Smirnov-toets; wanneer u verschillende scoreposities heeft gebruik dan de Mann-Whitney-U-toets.

HOOFDSTUK 10

Metrische data en één steekproef

Kies de Z-toets.

HOOFDSTUK 11

Metrische data en twee steekproeven

Kies de t-toets. Zoals uit hoofdstuk 11 blijkt, zijn er vier verschillende soorten t-toetsen; volg de keuze-procedure in het hoofdstuk om de juiste keuze te maken.

4. Nominale data en één steekproef4. Nominale data en één steekproef

4.1 De binominale toets.1 De binominale toets

Kies deze toets wanneer u over de frequenties beschikt van een nominale variabele met maar twee scoreposities. Bijvoorbeeld het aantal mannen en vrouwen, het aantal kopers en niet-kopers of het aantal zessen en niet-zessen bij het x-maal werpen van een dobbelsteen.
Laten we de werkwijze toelichten aan de hand van een voorbeeld:

Tabel 3. Het aantal mannen en vrouwen dat een winkel binnenkomt

	mannen	vrouwen	totaal
frequentie 3	17	20	

Onder de nulhypothese (H_0) dat het aantal mannen gelijk is aan het aantal vrouwen, $H_0 : p = q = ½$, kan de kans dat de totale N van 20 verdeeld is over 3 versus 17 worden berekend met behulp van formule (4.1)

(4.1.) p(x) = Install Equation Editor and double-click here to view equation. 9

N = totale frequentie
x = frequentie van voorkomen van p
p = kans op voorkomen in een categorie
q = 1 - p = kans op voorkomen in de andere categorie

(N.B.: N! = N*(N-1)*(N-2).etc. Voorbeeld 4!=4*3*2*1 = 24

Dan is de kans op het vinden van een 3 versus 17 verdeling:

= Install Equation Editor and double-click here to view equation. 10

Binnen het onderzoek vragen we ons echter gewoonlijk niet af "wat is de kans op het krijgen van de exacte waarden die we observeren?" maar veeleer vragen we ons af "Wat is de kans op het krijgen van de geobserveerde verdeling of zelfs een extremer verdeling?" Om deze vraag te kunnen beantwoorden maken we gebruik van de binominale steekproefverdeling zoals weergegeven in de formule (4.2.)

(4.2.) Install Equation Editor and double-click here to view equation. 11

We berekenen in dit voorbeeld dus niet alleen p(3) maar p(3) + p(2) + p(1) + p(0), dat wil zeggen $p(x \leq 3)$.
We kunnen deze drie andere kansen berekenen met formule (4.1.) of we kunnen direct tabel D (zie appendix) raadplegen waarin we zien dat de kans dat $p(x \leq 3)$ bij een N = 20 en waarbij geldt p = q = ½ is < .001. Aangezien deze kans dat de H_0 waar is kleiner is, dan de gebruikelijke α van .05 of .01 verwerpen wij de nul-hypothese p= q = ½ en concluderen we dat er een verschil bestaat in het aantal mannen en vrouwen dat de betreffende winkel binnen komt.

Keuze: binominaal toets of de Z-toets voor proporties:

- Wanneer N groter is dan 25 en p in de buurt van ½, tendeert de binominale verdeling naar een normale verdeling en kunt u derhalve de Z-toets voor proporties gebruiken.
- Gebruik de binominale toets wanneer N kleiner of gelijk is aan 25
- Wanneer N groter is dan 25 maar p tendeert naar de waarde 0 of 1, gebruik dan de vuistregel dat u als $Npq \geq 9$ de Z-toets moet kiezen en in andere gevallen de binominaal toets.

4.2 De Z-toets voor proporties.2 De Z-toets voor proporties

Gebruik deze wanneer u een nominale variabele heeft met twee scoreposities en een grote N (zie boven). Wanneer de steekproefverdeling van x bij benadering normaal verdeeld is met een gemiddelde $\mu_x = Np$ en een standaarddeviatie S_x = Install Equation Editor and double-click here to view equation. 12 dan kunt u Z berekenen met formule (4.3)

(4.3.) Z = Install Equation Editor and double-click here to view equation. 13

Voor een continuïteitscorrectie dient u het verschil van de geobserveerde waarde van x en de verwachte waarde $\mu_x = Np$ met een ½ te corrigeren. Wanneer het verschil positief is dient u er een ½ vanaf te trekken; wanneer het verschil negatief is telt u er een ½ bij op. Zodoende reduceert u het verschil.

Wanneer formule (4.3) op ons voorbeeld uit tabel 3 wordt toegepast vinden we:

Z = Install Equation Editor and double-click here to view equation. **14**

Tabel A (appendix) laat zien dat een Z-waarde van - 2.91 een eenzijdige kans van p = .0018 op een juiste nulhypothese heeft hetgeen zelfs in dit geval (N=20) een goede benadering van de binominale toets is. (Wanneer een tweezijdige toets wordt verlangd, moet de p uit tabel A worden verdubbeld).

4.3 De χ^2-toets voor één steekproef.3 De χ^2-toets voor één steekproef

De χ^2-toets is een "goodness-of-fit" toets, dat wil zeggen dat zij toetst of er een significant verschil bestaat tussen het geobserveerd aantal responses dat in elk van de categorieën valt en een verwacht aantal gebaseerd op de nulhypothese.
U kunt deze toets gebruiken wanneer u een frequentieverdeling heeft met 3 of meer categorien. Wanneer de verwachte waarde van een van de categorieën gelijk is aan 4 of minder dan moet u 2 of meer categorieën combineren. Wanneer u uiteindelijk maar 2 categorieën overhoudt dient u de binominaal toets te kiezen.

Tabel 4. Gekozen merk

	Merken					
	A	B	C	D	E	totaal
geobserveerde freq.	10	20	40	10	20	100

De nulhypothese dat er geen voorkeur voor de verschillende merken bestaat geeft als verwachte frequenties:

	A	B	C	D	E	totaal
verwachte frequenties	20	20	20	20	20	100

We kunnen nu de χ^2 met behulp van formule (4.4.) berekenen:

(4.4.) χ^2 = Install Equation Editor and double-click here to view equation. **15**

O_i = het geobserveerde aantal gevallen in de i^{de} categorie (of cel)

E_i = het verwachte aantal gevallen in de i^{de} categorie (of cel) onder H_o

Install Equation Editor and double-click here to view equation. **16 = som van 1 tot k categorieën**

Toepassing van formule (4.4.) op de gegevens van tabel 4 levert ons:

$$\chi^2 = \frac{(10-20)^2}{20} + \frac{(20-20)^2}{20} + \frac{(40-20)^2}{20} + \frac{(10-20)^2}{20} + \frac{(20-20)^2}{20} = 30$$

De steekproefverdeling van χ^2 onder H_o volgt de χ^2-verdeling met df=k-1, waarbij df verwijst naar de vrijheidsgraden en k het aantal categorieën aangeeft. Het aantal vrijheidsgraden is hier dan 5-1 = 4.
De χ^2 van 30 met df = 4 is zeer significant : $p \leq .001$. Met andere woorden H_o kan worden verworpen en we concluderen hier dat er een voorkeur voor bepaalde merken bestaat.
De χ^2- tabel treft u in tabel C van de appendix.
Opmerking: wanneer u het verschil tussen 2 merken wilt toetsen, gebruik dan de percentagetoets voor gecorreleerde percentages.

4.4 Percentagetoets voor gecorreleerde percentages .4 Percentagetoets voor gecorreleerde percentages

Deze toets is afgeleid van de onder 4.2. genoemde Z-toets voor proporties. Zij kan worden gebruikt wanneer u een grote N heeft. Zij is opgenomen omdat ze makkelijk te gebruiken is voor kruistabellen in samenhang met de χ^2-toets. We onderscheiden twee situaties:

1. **Situatie 1: de percentages tellen tot 100 op.**
   Deze toets is zeer geschikt wanneer u verschillen toetst tussen twee percentages die afgeleid zijn van dezelfde steekproef en die percentages optelt tot 100.
   Om het verschil tussen de percentages P_1 en P_2 te toetsen gebruiken we formule (4.5.).

(4.5.) Z = Install Equation Editor and double-click here to view equation. **17**

P_1 = percentage voorvallen 1

P_2 = percentage voorvallen 2

Install Equation Editor and double-click here to view equation. 18 = standaardfout voor het verschil tussen twee percentages, waarbij geldt:

(4.6) Install Equation Editor and double-click here to view equation. 19

Voorbeeld.

Gegeven zijn dezelfde frequenties van gekozen merken zoals tabel 4.

Tabel 5

	gekozen merken					
	A	B	C	D	E	Totaal
percentages	10	20	40	10	20	100
Steekproefomvang N = 100						

H_o: er is geen verschil in voorkeur tussen B en C: $P_1 = P_2$

(4.6) Install Equation Editor and double-click here to view equation. 20

waarbij:

P_1 = percentage C en $Q_1 = 100 - P_1$ = percentage 'niet C'

P_2 = percentage B en $Q_2 = 100 - P_2$ = percentage 'niet B'

(4.5) Z = Install Equation Editor and double-click here to view equation. 21

Volgens tabel A (Appendix): Z = 2,67 met een p <.01 kan de nulhypothese P1 = P2 verworpen worden.

2. **Situatie 2: de percentages tellen op tot meer dan 100.**

Wanneer de percentages optellen tot boven de 100 is de in formule (4.6) genoemde standaardfout voor het verschil tussen percentages niet langer valide.

Voorbeeld:

Stel dat we mensen vragen "Welk koffiemerk heeft u de laatste week gekocht?" Dan is het mogelijk dat sommige mensen meer dan 1 merk hebben gekocht.

Om het verschil tussen de 2 merkpercentages te toetsen is een andere standaardfout formule noodzakelijk; we hebben namelijk een formule nodig die rekening houdt met de overlap tussen twee merken.

(4.7) Install Equation Editor and double-click here to view equation. 22

P_{12} = de overlap **proportie**; de proportie die zowel 1 als 2 koopt

P_1, P_2, Q_1 en Q_2 zijn hier proporties

Tabel 6

	gekochte merken					
	A	B	C	D	E	Totaal
Percentages	12	20	40	17	20	109
Steekproefgrootte N = 100						

H_o: geen verschil in voorkeur voor merk B en C.

De geobserveerde overlap van B en C is 5 wat overeenkomt met 5%, derhalve:

Install Equation Editor and double-click here to view equation. 23

Install Equation Editor and double-click here to view equation. 24

De H_o kan worden verworpen.

5. Nominale data en twee afhankelijke steekproeven5. Nominale data en twee afhankelijke steekproeven

5.1 McNemar's toets voor de significantie van veranderingen.1 McNemar's toets voor de significantie van veranderingen

McNemar's-toets is met name toepasbaar wanneer u een 2x2-tabel heeft waarbij de data uit gematchte steekproeven komen. U heeft bijvoorbeeld te maken met een before - after design en u wilt toetsen wat het effect is van een bepaalde behandeling.

Tabel 7

bezitsverhouding		
	Voor / Na behandeling	
Bezitter	E	F
Niet bezitter	G	K
Totaal N	E + G	F + K

In tabel 7 worden het aantal bezitters en niet-bezitters van een druktoets telefoon weergegeven voor en na een advertentiecampagne. Het zou niet juist zijn over deze tabel een χ^2 te berekenen. We moeten haar eerst omzetten in een veranderingstabel.

Tabel 8

verandering van bezitspatroon			
	[voor]		
	Bezitter	Niet bezitter	Totaal
Bezitter	a	b	f
[na]Niet bezitter	c	d	h
Totaal	e	g	N = e + g = f + h

Om de nulhypothese te toetsen, dat het aantal bezitters onveranderd is gebleven nemen we alleen de celwaarden b en c in beschouwing, omdat het deze twee cellen zijn die bijdragen tot een eventuele verandering. De verwachting onder de nulhypothese is dat ½(b+c) gevallen veranderen in de ene richting en dat ½(b+c) gevallen in de andere richting verandert. Daarom hebben we tabel 9 samengesteld.

Tabel 9

verandering van bezitspatroon		
Verandering	Waargenomen	Verwacht
Niet bezitter naar bezitter	b	½ (b+c)
Bezitter naar niet bezitter	c	½ (b+c)

In deze tabel is formule (4.4.) toepasbaar:

(4.4) Install Equation Editor and double-click here to view equation. 25 waarbij geldt:

Install Equation Editor and double-click here to view equation. 26

In het geval van een 2 x 2-matrix is een continuïteitscorrectie noodzakelijk; de aangepaste en juiste formule is formule (5.1).

(5.1) Install Equation Editor and double-click here to view equation. 27 met df = 1

Tabel 10

bezit van een druktoestel		
	[Voor]	[Na Campagnes]
Bezitters	50	80
Geen bezitters	100	70
Totaal	150	150

Tabel 11

verandering in bezit			
	[Voor]		
	Bezitter	Geen bezitter	Totaal
Bezitter	45	35	80
[Na] Geen bezitter	5	65	70
Totaal	50	100	150

Gebruik van formule (5.1) levert ons een Install Equation Editor and double-click here to view equation. 28 met df = 1; dat is zeer significant: p <.001. Zodat onze nulhypothese van geen verandering kan worden verworpen (zie appendix C). Wanneer het totaal aantal veranderingen kleiner of gelijk is aan 10, dan dient de binominaal toets (par. 4.1) toegepast te worden in plaats van de X-toets.

5.2 Uitbreiding van de McNemar's toets voor de significantie van verandering.2 Uitbreiding van de McNemar's toets voor de significantie van verandering

De McNemar's toets kunt u zien als een speciaal geval van de χ^2 toets: het is een χ^2 toets op een veranderingstabel zoals in tabel 9. Formule (5.1) geldt alleen voor een 2x2 veranderingstabel. Echter de χ^2-toets kan worden gebruikt bij het toetsen van verschillen bij iedere m x n - tabel. De verwachte waarden kunnen worden berekend onder de nulhypothese dat er geen verandering is of nog preciezer geformuleerd dat er verandering in alle richtingen optreedt.

Voorbeeld:

Tabel 12

Merkvoorkeur voor en na behandeling

		[Voor]			
	Merk	A	B	C	Totaal
	A	10	10	0	20
[Na]	B	5	20	5	30
	C	15	20	15	50
	Totaal	30	50	20	100

Van tabel 12 kan de veranderingstabel 13 worden afgeleid

Tabel 13

veranderingstabel

Veranderingen		Geobserveerd	Verwacht*
A	B	5	[5 + 10]/2 = 7.5
B	A	10	7.5
A	C	15	[15 + 0]/2 = 7.5
C	A	0	7.5

B	C	20	[20 + 5]/2 = 12.5
C	B	5	12.5

* Verwacht: onder de nulhypothese dat er per saldo geen veranderingen zijn, verwachten we dus dat de veranderingen hetzelfde zijn in alle richtingen. We zien tussen A en B bijvoorbeeld in totaal 15 veranderingen, 5 van A naar B, 10 van B naar A. Onder de nulhypothese verwachten we evenveel veranderingen in beide richtingen, dus 7½ van A naar B en 7½ van B naar A. Per saldo dan dus geen veranderingen.

(4.4) Install Equation Editor and double-click here to view equation. 29

df = N - 1 = 3 - 1 = 2

N: aantal score posities Hier: aantal merken

Een χ^2 van 25.67 met 2 vrijheidsgraden heeft een kans < .001 om zich voor te doen, zodat de H_o, die ervan uitging dat er geen verandering is, kan worden verworpen (zie appendix Tabel C).

6. Nominale data en twee onafhankelijke steek-6. Nominale data en twee onafhankelijke steekproeven

6.1 Keuze tussen de Fisher's toets, de χ^2-toets met continuteitscorrectie en de χ^2-toets.1 Keuze tussen de Fisher's toets, de χ^2-toets met continuteitscorrectie en de χ^2-toets

U heeft hier de keuze tussen de Fisher's-toets, de χ^2_c- en de χ^2-toets.

Kies de Fisher's toets wanneer:

* N<20
* 20 < N <40 waarbij één van de verwachte celwaardes kleiner is dan 5

Kies de χ^2_c-toets wanneer:

* één van de verwachte celwaarden minder is dan 7.5 en N> 20
* alle te verwachten celwaarden groter zijn dan 7.5 en wanneer u tevens een 2 x 2-tabel heeft.

Kies χ^2-toets:

* in alle andere gevallen, dat wil zeggen wanneer alle verwachte waarden groter zijn dan 7.5 en u een m x n-tabel heeft, waar m of n of beiden groter zijn dan 2.

De formule voor berekening van de verwachte frequenties of celwaarden, in een i x j - tabel is (6.1)

(6.1) E = Install Equation Editor and double-click here to view equation. 30

E_{ij} = verwachte waarde voor cel ij, dit is de cel in rij i en kolom j

F_i = de totale frequentie in rij i

F_j = de totale frequentie in kolom j

N = totale steekproef grootte.

Tabel 14

+---+

¦ Tabel van waargenomen frequenties ¦

¦ a b a+b ¦

c	d	c+d
a+c	b+d	N = a+b+c+d

De verwachte waarde voor cel a in tabel 14 is (bij gebruik van 6.1):

Ea = Install Equation Editor and double-click here to view equation. 31 ; voor cel b: Eb = Install Equation Editor and double-click here to view equation. 32 enz.

6.2 Fisher's exacte kans test.2 Fisher's exacte kans test

Hierboven staat aangegeven wanneer u deze gebruiken moet.
De exacte kans dat u een bepaalde set van frequenties observeert in een 2 x 2 tabel wordt gegeven door middel van formule (6.2) waarbij de symbolen van tabel 14 gebruikt worden.

(6.2) P = Install Equation Editor and double-click here to view equation. 33

Tabel 15

A	B	A+B
C	D	C+D
A+C	B+D	N = A+B+C+D

Voorbeeld:
In tabel 16 wordt het aantal mannen (groep I) en het aantal vrouwen (groep II) weergegeven die een examen wel (+) of niet (-) hebben gehaald.

Tabel 16

	-	+	Totaal
Groep I	4	1	5
Groep II	1	6	7
Totaal	5	7	12

De exacte kans voor het krijgen van de waarden uit tabel 16, wanneer de randtotalen als gegeven worden beschouwd, is:

p = Install Equation Editor and double-click here to view equation. 34

* x! = x.x-1.x-2.......21. b.v. 5! = 5x4x3x2x1 = 120

Onder de H_o dat er geen verschil is tussen de groepen, is echter, gegeven de randtotalen, zelfs een meer extreme afwijking mogelijk:

Tabel 17

	-	+	Totaal
Groep I	5	0	5
Groep II	0	7	7
Totaal	5	7	12

p = Install Equation Editor and double-click here to view equation. 35

De kans op het krijgen van de waarden in tabel 16 of zelfs extremere waarden dan in tabel 17 is:
p = .044 + .001 = .045.
De H_o dat er geen verschil tussen de groepen bestaan kan worden verworpen op het 5%-significantieniveau.

Als u als onderzoeker tevreden bent met het gebruik van significantieniveaus in plaats van exacte kansen, kan tabel I (zie appendix) als volgt worden gebruikt:

1. Bepaal de rechter randwaarden, zoals de waarden van A+B en C+D in tabel 10.
2. a. Neem de grootste waarde van de twee (in ons voorbeeld van tabel 16 is dat C+D=7) en zoek dat getal op in de linker kolom van tabel I (in de tabel vindt u het als A+B=7)
   b. Neem de kleinste waarde van de twee (in ons voorbeeld is dat A+B=5) en zoek dit op in de tweede kolom van tabel I (u vindt het als C+D=5).
3. Neem de hoogste rechter randwaarde en bepaal de daarbij behorende hoogste celwaarde (in ons voorbeeld is dat D=6) en zoek dit op in de derde kolom van tabel I (met het kopje B (of A)).
4. Zoek vervolgens in de laatste kolom van de tabel het bijbehorend significantieniveau als volgt:
   - bepaal de kleinste marginale waarde van uw kolom (in ons voorbeeld is dat A+B=5).

- bepaal daarvan de kleinste celwaarde (in ons voorbeeld is dat B=1, want A=5 is groter).
- zoek bij de kleinste van de beide kleinste marginale celwaarden het bijbehorend significantieniveau (in ons voorbeeld is dat .025).

6.3 De χ^2-toets voor twee onafhankelijke steekproeven.3 De χ^2-toets voor twee onafhankelijke steekproeven

Eerder gaven wij aan welke criteria u dient te hanteren bij de keuze tussen de Fisher's-toets, de χ^2-toets en de χ^2_c-toets.
Zoals we al zagen bij de χ^2-toets voor één steekproef kan de χ^2-toets gebruikt worden ter toetsing van het verschil tussen geobserveerde frequenties en de verwachte frequenties gebaseerd op een nulhypothese.

Voorbeeld:
We hebben voor twee steekproeven (mannen en vrouwen) de frequenties bepaald waarmee zij een bepaald merk of produkt kopen.

Tabel 18

merken gekocht door mannen en vrouwen					
	Geobs.freq.		Verwachte freq.		
Merken	mannen	vrouwen	mannen	vrouwen	Totaal
A	24	16	16	24	40
B	10	50	24	36	60
C	26	24	20	30	50
Totaal	60	90	60	90	150

Onder de hypothese dat er geen verschil bestaat tussen de groepen kunnen we de verwachte frequenties in tabel 18 berekenen door middel van formule (6.1). We zien dan dat de verwachte waarde van bijvoorbeeld cel 11, dat is de cel met mannen die merk A kopen, gelijk is aan:

Install Equation Editor and double-click here to view equation. 36

De χ^2-toets wordt hier door middel van gebruikmaking van formule (4.4.) berekend:

Install Equation Editor and double-click here to view equation. 37

Het aantal vrijheidsgraden voor een r x c tabel = (r-1)(c-1)

r = het aantal rijen van een tabel

c = het aantal kolommen in de tabel

In tabel C (appendix) vindt u voor een χ^2 = 23,28 met df = (3-1)(2-1) = 2 een p<.001. Met andere woorden de H_0 waarbij geen verschil wordt verondersteld, kan worden verworpen.

Uit bovenstaand voorbeeld kan worden afgeleid dat de χ^2-toets kan worden gebruikt voor iedere r x c contingentie tabel zodat voor meer dan twee steekproeven (of groepen) formule (4.4) met (r-1)(c-1) vrijheidsgraden gebruikt kan worden.

6.4 De χ^2-toets met continuïteitscorrectie: een χ^2_c-toets.4 De χ^2-toets met continuïteitscorrectie: een χ^2_c-toets

Het gebruik van deze toets werd al aangegeven bij de de keuze tussen de Fisher-toets, de χ^2-toets en de χ^2_c-toets (zie aldaar).
Wanneer een of meer van de verwachte celwaarden kleiner is dan 7.5 of wanneer u een 2 x 2 contingentie tabel heeft, moet een continuïteitscorrectie gebruikt worden.
Dit betekent dat van alle verschillen tussen de geobserveerde en verwachte waarden een half wordt afgetrokken, dat wil zeggen dat wanneer het verschil positief is er een half wordt afgetrokken en wanneer het verschil negatief is, er een half bij wordt opgeteld, waardoor alle verschillen met een half worden gereduceerd, zoals weergegeven in formule (6.3).

(6.3) Install Equation Editor and double-click here to view equation. 38 met df = (r-1)(c-1)

6.5 Speciaal geval: de χ^2-toets voor een 2 x 2-tabel.5 Speciaal geval: de χ^2-toets voor een 2 x 2-tabel

Wanneer u een 2 x 2 tabel heeft is er een eenvoudiger formule te gebruiken om de χ^2 te berekenen. De geobserveerde frequenties in de vier cellen in een dergelijke tabel worden aangegeven met a, b, c en d zoals

wordt getoond in tabel 19

Tabel 19

a	b	a+b
c	d	c+d
a+c	b+d	N = a+b+c+d

De formule die hier gehanteerd kan worden, luidt (6.4):

(6.4) Install Equation Editor and double-click here to view equation. 39 met df (r-1)(c-1)=1

Tabel 20

Frequenties voor de merken A en B aangeschaft door mannen en vrouwen			
	mannen	vrouwen	Totaal
Merk A	20	40	60
Merk B	50	30	80
Totaal	70	70	140

Bij gebruik van formule (6.4) :

Install Equation Editor and double-click here to view equation. 40

In tabel C kunnen we zien dat een χ^2 van 12.86 met df=1 een kans heeft van <.01. Met andere woorden de H_o waarbij verondersteld wordt dat er geen verschil tussen de groepen bestaat kan worden verworpen.

6.6 De percentage- of proportietoets voor onafhankelijke steekproeven.6 De percentage- of proportietoets voor onafhankelijke steekproeven

Deze toets kan worden toegepast bij het toetsen van verschillen tussen twee onafhankelijke percentages of proporties.

De gangbare formule om dit te berekenen is (6.5):

(6.5.) Z = Install Equation Editor and double-click here to view equation. 41

Waarbij p_1 is het percentage van de ene steekproef

p_2 is het percentage van de andere steekproef

De standaardfout van (p_1-p_2) kan worden berekend door middel van formule (6.6).

(6.6) Standaardfout Install Equation Editor and double-click here to view equation. 42

waarbij: p = Install Equation Editor and double-click here to view equation. 43

n_1 en n_2 zijn de steekproefomvangen.

Voorbeeld:

In 1985 blijkt p_1 = 45% van een random steekproef van n_1 = 500 vrouwen een bepaald tijdschrift regelmatig te lezen, in 1987 blijkt uit een andere random steekproef van n_2 = 250 een p_2 = 51%. Om te toetsen of er verschillen bestaan maken we gebruik van formule (6.5) en (6.6).

p = Install Equation Editor and double-click here to view equation. 44

De standaardfout (p_1-p_2) is dan: Install Equation Editor and double-click here to view equation. 45

Install Equation Editor and double-click here to view equation. 46

Deze Z-waarde van -1.55 heeft een p van .0606. (Zie Appendix, Tabel A) Zodat de H_0 van geen verschil kan worden verworpen; er is geen significante verandering waargenomen in het percentage vrouwen dat dit tijdschrift leest.

7. Ordinale data en één steekproef7. Ordinale data en één steekproef

7.1 De Kolmogorov-Smirnov-toets voor één steekproef.1 De Kolmogorov-Smirnov-toets voor één steekproef

Dit is wederom een toets van het "goodness of fit"-type. Dat wil zeggen dat een geobserveerde cumulatieve verdeling van waarden wordt getoetst tegen een andere onder de nulhypothese verwachte cumulatieve verdeling.
Deze toets kan worden gebruikt wanneer u een frequentieverdeling heeft van een ordinale variabele. (Een alternatief voor deze test is de χ^2-toets voor één steekproef maar die is veel minder krachtig.)

Voorbeeld:
Twintig mensen doen een keuze uit 5 verschillende kleuren sinaasappelen

Tabel 21

voorkeur voor 5 kleurintensiteiten van sinaasappels Rangordeningen van gekozen sinaasappels 1 is de lichtste, 5 de donkerste	1	2	3	4	5
Aantal respondenten met voorkeur	0	2	4	8	6
F(x)= theoretische cumulatieve verdeling van keuzes onder de H_0	1/5	2/5	3/5	4/5	5/5
O(x)= cumulatieve verdeling van de geobserveerde keuzes	0/20	2/20	6/20	14/20	20/20
F(x) - O(x)	4/20	6/20	6/20	2/20	0/20

Procedure:

In tabel 21 worden in de eerste rij de keuze van 20 mensen voor 5 verschillende kleurintensiteiten van sinaasappels weergegeven. H_o voorspelt geen voorkeur voor een bepaalde kleurintensiteit dat wil zeggen iedere kleurintensiteit heeft een kans van 1/5 om gekozen te worden. F(x), de cumulatieve verdeling gebaseerd op de H_o wordt weergegeven in de tweede rij. O(x) is de cumulatieve verdeling van de geobserveerde keuzes van de 20 individuen. De onderste rij van tabel 21 geeft de afwijking aan van de geobserveerde waarde ten opzichte van de theoretische waarde van ieder paar. De grootste afwijking (D) in deze rij is 6/20 (bij 2 en 3). Tabel E (appendix) laat zien dat voor een N=20 een $D \geq .300$ een kans onder de H_o heeft van $p<.05$. We mogen derhalve concluderen dat de individuen een voorkeur voor bepaalde kleurintensiteiten van de sinaasappel hebben.

8. Ordinale data en twee afhankelijke steekproeven8. Ordinale data en twee afhankelijke steekproeven

8.1 De tekentoets.1 De tekentoets

Wanneer u twee afhankelijke gematchte steekproeven heeft die paarsgewijs kunnen worden vergeleken is dit een geschikte test. Daarbij hoeven deze paren niet noodzakelijkerwijs betrekking te hebben op dezelfde individuen die tweemaal zijn gemeten. De verschillende paren kunnen ook zijn gevormd uit verschillende populaties, zolang is voldaan aan de voorwaarde dat de paren zijn gematcht met betrekking tot de relevante exogene variabelen.
De enige aanname, waarmee u rekening moet houden bij het gebruik van de tekentoets, heeft betrekking op de wederzijdse onafhankelijkheid van de verschillen tussen de paren. De twee parallelle sets van waarden mogen gecorreleerd zijn en de vorm van de verdeling van verschillen is niet van belang.
Ga wel na of de hierna te behandelen toets (de Wilcoxon-rang tekentoets) niet beter toegepast kan worden.

Tabel 22

Attitude ten aanzien van energiebesparing

Scores Voor	Na	Teken van Voor-Na	Berekening	
5	5	0	a) N = 20	
4	5	-	b) N met teken = 20 - 4 = 16	
4	3	+	c) H_0 : P(+) = P(-) = 1/2	
2	4	-	d) N(+) = 3 en N(-) = 13	
4	5	-	e) N met teken= 16 $\leq$ 25 $\rightarrow$Binominal-test	
3	4	-	e1) p van 3 of minder uit 16 (zie tabel D, appendix):	
1	3	-	Install Equation Editor and double-click here to view equation.	47
3	5	-	Install Equation Editor and double-click here to view equation.	48
4	5	-	Install Equation Editor and double-click here to view equation.	49
4	4	0		
3	4	-		
2	3	-		
5	5	0		
5	4	+		

3	4	-
3	4	-
4	3	+
2	5	-
4	4	0
4	5	-

Score: het getal 5 betekent een zeer positieve, en een zeer negatieve attitude

Voorbeeld:

De attitude ten aanzien van energiebesparing wordt gemeten bij 20 individuen voor en na blootstelling aan een toespraak pro energiebesparing.

De werkprocedure bij de tekentoets gaat ongeveer als volgt (in tabel 22 ziet u er een voorbeeld van)

a. Bepaal het teken van het verschil tussen de twee scores van ieder paar.

b. Sluit die paren uit die geen teken hebben, die paren dus die twee maal dezelfde score hebben.

c. Onder de H_0 van geen verschil tussen de paren van scores, dat wil zeggen geen effect van de speech, is het te verwachten aantal plussen en minnen gelijk, zodat p(+) = p(-) = Install Equation Editor and double-click here to view equation. **50.**

d. Bepaal het feitelijke aantal plussen en minnen.

e. Bereken de kans dat het verkregen aantal plussen en minnen ook feitelijk wordt geobserveerd. De methode om te bepalen hoe groot de kans is dat -onder de nulhypothese- een waarde van plussen en minnen even extreem als geobserveerd, voorkomt, hangt met name af van de omvang van N met teken:

e.1 Als N met teken = 25 of kleiner (zoals in tabel 22) kan de binominaaltoets gebruikt worden (zie formule 4.2).

(4.2) Install Equation Editor and double-click here to view equation. **51**

N = N met teken

p = q = ½

x = kleinste waarde van N(+) en N(-)

e.2 Wanneer N met teken groter is dan 25, bereken dan de Z-waarde door middel van formule (4.3)

(4.3) z = Install Equation Editor and double-click here to view equation. **52**

N = N met teken

p = q = ½

x = de kleinste waarde van N(+) en N(-)

Voorbeeld van een N met teken dat groter is dan 25:

Gegeven: totaal aantal paren is 36

N met teken is 30

N(+)= 5 en N(-)=25

Dan: Install Equation Editor and double-click here to view equation. 53

De daarmee samenhangende kans van een z = 3.47 (zie tabel A, appendix) is een kans $p<<.001$.

De H_0 welke uitgaat van geen verschil kan worden verworpen.

8.2 De Wilcoxon-rang tekentoets.2 De Wilcoxon-rang tekentoets

Als u twee afhankelijke steekproeven heeft, die ieder op dezelfde variabele een score hebben die paarsgewijs kan worden vergeleken en de verschillen tussen de twee scores binnen een paar niet alleen kunnen worden aangegeven door middel van een teken, zoals in de tekentest, maar het bovendien mogelijk is de omvang van het verschil betekenisvol te bepalen, kan deze toets worden gebruikt.

De procedure van de Wilcoxon-rang tekentoets:

a. Bepaal de verschillen van de twee scores binnen ieder paar.

b. Sluit die paren uit die geen verschil vertonen, tel de N met teken.

c Orden deze verschillen zonder daarbij te letten op het teken. Verschillen die met anderen een "tie" (ofwel ex-aequo) vormen, krijgen het gemiddelde van die "tie"-rangordening, ken aan elk van de rangordeningsgetallen een + of - teken toe.

d. **Bepaal T: waarbij T de kleinste van de beide somscores van de + of- is.**

e. **Bepaal de kans op de geobserveerde T-waarde. De wijze waarop u die kans berekent hangt af van de grootte van N met teken:**

e.1 Wanneer N met teken $\leq$25, kan de kans voor het vinden van een T onder de H_0 "geen verschil tussen de condities", gevonden worden in tabel G (appendix).

e.2 Wanneer de N met teken >25, kan de waarde van z ook worden berekend met formule (8.1).

(8.1) z = Install Equation Editor and double-click here to view equation. **54**

T = de kleinste van de sommen van de rangordeningen met een gelijk teken (voor tabel 23 zou dit zijn 19,5 ; dit is de som van de positieve rangcijfers).

N = de N met teken (voor tabel 23 zou dit 16 zijn, waardoor formule (8.1) niet is toegestaan omdat deze kleiner is dan 25).

Tabel 23

Attitude ten aanzien van energiebesparing*

Scores op attitudeschalen		Verschil	Rangorde van verschil		
Voor	Na	a) B - A	c) negatief	positief	
5	5	0	b)		
4	5	-1	- 6,5		
4	3	+1		+ 6,5	
2	4	-2	- 14		
4	5	-1	- 6,5		
3	4	-1	- 6,5		N=20
1	3	-2	- 14		
3	5	-2	- 14		
4	5	-1	- 6,5		
4	4	0	b)		
3	4	-1	- 6,5		
2	3	-1	- 6,5		
5	5	0	b)		
5	4	+1		+ 6,5	
3	4	-1	- 6,5		
3	4	-1	- 6,5		
4	3	+1		+ 6,5	

2	5	-3	- 16
4	4	0	b)
4	5	-1	- 6,5

b. N met teken = 16

d. T = totaal + = 19.5 (omdat het totaal - = 116.5)

e. De kans op het vinden van een T = 19.5 bij een N met teken van 16 is:
P< .01 (zie tabel G).

* In tabel 22 zijn dezelfde gegevens gebruikt.

9. Ordinale data en twee onafhankelijke steek-9. Ordinale data en twee onafhankelijke steekproeven

9.1 De mediaan toets.1 De mediaan toets

Door middel van de mediaantoets kunnen we bepalen hoe waarschijnlijk het is dat twee onafhankelijke steekproeven getrokken zijn uit een populatie met dezelfde medianen.

Voorbeeld: De attitude ten behoeve van het nemen van een krediet in Amerika en Nederland werd gemeten. In beide landen werd gevraagd in welke mate het al dan niet juist is een krediet te nemen ten aanzien van 5 verschillende huishoudelijke artikelen. Er werd een Guttman-schaal geconstrueerd waarbij de waarde 1 werd toegekend aan respondenten die slechts 1 artikel geschikt achten voor krediet en de waarde 5 werd toegekend aan hen die alle 5 artikelen voor krediet geschikt achten.

Tabel 24

gebruik van krediet in de USA en Nederland

Attitude score	USA	Nederland	Totale optelling
1	-	40	40
2	5	30	75
3	15	15	105
4	40	10	155
5	60	5	220
N =	120	100	220

Procedure mediaantoets:

a. Bepaal de gecombineerde mediaan voor beide steekproeven, gebruik formule (2.1):

Mediaan = EB + Install Equation Editor and double-click here to view equation. **55**

Mediaan = 3,5 + Install Equation Editor and double-click here to view equation. **56**

b. Verdeel de scores van beide steekproeven op de gecombineerde mediaan. Zij die een 1, 2 of 3 scoren komen allen beneden die mediaan te liggen. Uit het interval 3,5 - 4,5 (score positie 4) vallen tevens 1/10 van de scores dat wil zeggen (3,6-3,5)/(4,5-3,5).

Als beide steekproeven worden gesplitst rondom de gecombineerde mediaan, krijgen we:

Tabel 25

gebruik van krediet in de USA en Nederland

	USA	Nederland	Totaal
Onder de mediaan	24	86	110
Boven de mediaan	96	14	110
Totaal	120	100	220

c. Zoek de kans voor de geobserveerde scores in tabel 25 op, door middel van de Fisher-toets, de χ^2_c-toets of de χ^2-toets.
Voor de criteria bij de keuze tussen deze 3 zie par.(6.1).

De juiste toets is hier de χ^2 dat wil zeggen formule (6.4):

Install Equation Editor and double-click here to view equation. **57**

Deze χ^2 met df = 1 heeft een p <<.01, dat wil zeggen de H_o, die inhoudt dat er geen verschil bestaat, kan worden verworpen.

Uitbreiding van de mediaantoets: k-steekproeven.

De mediaantoets kan ook worden toegepast bij het toetsen van de verschillen tussen verdelingen van meer dan twee steekproeven. De daarbij te volgen toetsprocedure is gelijk aan die welke we beschreven voor het geval van twee steekproeven, alleen de eerste stap is ietwat anders: De mediaan die hier moet worden berekend is de gecombineerde mediaan voor alle k-steekproeven. Vervolgens wordt de frequentie van scores die vallen beneden en boven de mediaan bepaald voor alle k-steekproeven. Een k x 2 frequentietabel is daar het resultaat van. De χ^2-toets met k-1 vrijheidsgraden kan daarop worden toegepast, evenals op tabel 25.

9.2 De Mann-Whitney U-toets.2 De Mann-Whitney U-toets

Deze toets is een van de meest krachtige non-metrische toetsen en is een bruikbaar alternatief voor de T-toets. De Mann-Whitney U-toets vereist op z'n minst een ordinaal meetniveau. Van de data wordt aangenomen dat zij continu verdeeld zijn. Zij vereist geen normaalverdeling of homogeniteit van variantie en is daarenboven erg bruikbaar bij een kleine N of wanneer de meting zwakker is dan een intervalschaal.

Voorbeeld: in een onderhandelingsexperiment moeten paren van kopers en verkopers tot overeenstemming komen. In de experimentele conditie werken 6 paren onder zware tijdsdruk terwijl in de controleconditie geen tijdslimiet is gesteld. De nulhypothese luidt dat beide condities geen verschil zullen vertonen in de hoeveelheid winst die kopers en verkoper maken.

Tabel 26

Onderhandelen onder tijdsdruk

Totaal van kopers- en verkopers-winst in guldens

Experimentele groep 64 80 90 110 115 150

a) n = 6

Controle groep 75 105 115 140 155 160 170

a) m = 7

-Rangordening 1 2 3 4 5 6 7,5 9 10 11 12 13

c) Rn = 1 + 3+ 4 + 6 + 7,5 + 10 = 31,5

Rm = 2 + 5 + 7,5 + 9 + 11 + 12 + 13 + = 59,5

d) Un = (6).(7) + Install Equation Editor and double-click here to view equation. 58 - 31,5 = 31,5

Um = (6).(7) + Install Equation Editor and double-click here to view equation. 59 - 59,5 = 10,5

e) Um < Un -> U = Um = 10,5 N = n + m

Uit tabel H (appendix) kan worden afgelezen dat Um 8 of minder moet zijn om significant te zijn. Daarom kan de nulhypothese niet verworpen worden. De rangordeningen zijn niet significant verschillend.

Procedure (gevolgd in tabel 26)

a. Bepaal n en m: respectievelijk het aantal gevallen in de kleinere en de grotere groep.
b. Rangordes de scores van beide groepen over de groepen heen vanaf 1 (de laagste score) t/m N (N= n+m). Ken aan een knooppunt binnen de observaties het gemiddelde van de knoop in de rangordening toe (in ons voorbeeld 7.5).
c. Bepaal de waarde van Rn en Rm, dat is de som van de rangordegetallen voor de groepen r en m. Overigens geldt dat Rn + Rm = N (N+1) /2. Bepaal de waarde van Un en Um door middel van gebruikmaking van formule (9.1) en (9.2)

(9.1) Un = n.m + Install Equation Editor and double-click here to view equation. 60

(9.2) Um = n.m + Install Equation Editor and double-click here to view equation. 61

De kleinste van de beide U's heeft u nodig voor de toets.
Met formule (9.3) is het mogelijk om de andere U op een snelle manier te berekenen, gegeven de uitkomst van een van beide U's.
(9.3) Un = n.m - Um

e. De methode voor het bepalen van de significantie van de kleinste van de geobserveerde U's is afhankelijk van de omvang van n (de kleinste steekproef N).

e1 Als $n \leq 20$ en $m \leq 40$ wordt de geobserveerde waarde van de kleinste U vergeleken met de tabelwaarde in tabel H (appendix) bij het gewenste significantieniveau en de juiste steekproefomvang. Als de berekende waarde van U gelijk is aan of kleiner is dan de waarde in de tabel wordt de H_o verworpen: de geobserveerde rangverschillen zijn significant.

e2 Wanneer n > 20 kan de kans op een U-waarde zoals geobserveerd bepaald worden door middel van berekening van de Z-waarde zoals die in formule (9.4) wordt weergegeven.

(9.4) z = Install Equation Editor and double-click here to view equation. 62

n = kleinste steekproef

m = grootste steekproef

U = de kleinste van de U's

Wanneer het aantal "ties" in de rangordening erg groot is, kies dan formule (9.5) welke vanzelf wordt gereduceerd tot formule (9.4) als er geen "ties" voorkomen.

(9.5) Install Equation Editor and double-click here to view equation. 63

n = kleinste steekproefomvang

m = grootste steekproefomvang

N = n + m

U = de kleinste van de U's

Σ T = Install Equation Editor and double-click here to view equation. 64

t = aantal observaties dat een ex-aequo vertoont bij een bepaalde rangorde.

Voorbeeld van het berekenen van een Σ T:

Gegeven de groepen "ties": 2 scores van 21, 5 scores van 28 en 3 scores van 40, terwijl de rest van de scores uniek is; dan is

Install Equation Editor and double-click here to view equation. 65

De waarde van z is bij een correctie voor "ties" altijd een klein beetje groter dan zonder correctie. De kans die hoort bij de berekende z-waarde kan gevonden worden in tabel A (appendix).

9.3De Kolmogorov-Smirnov-toets voor twee onafhankelijke steekproeven.3 De Kolmogorov-Smirnov-toets voor twee onafhankelijke steekproeven

Deze test richt zich op de mate waarin twee cumulatieve verdelingen overeenkomen. Deze verdelingen kunnen

betrekking hebben op twee steekproeven die beide uit dezelfde populatie zijn getrokken, waarbij beide steekproeven aan verschillende experimentele behandelingen zijn blootgesteld. U zult dan willen bepalen wat het effect is van de experimentele behandeling. Beide steekproeven kunnen ook zijn getrokken uit twee verschillende populaties. U zult dan willen bepalen of de populaties verschillen.
In beide voorbeelden is een grote afwijking tussen de twee cumulatieve steekproefverdelingen een bewijs voor het verwerpen van de H_0.

Voorbeeld:
De data in tabel 27 komen uit tabel 21 die wij gebruikt hebben om de Kolmogorov-Smirnov-toets voor één steekproef te demonstreren.

Tabel 27

voorkeur van mannen en vrouwen voor 5 verschillende kleurintensiteiten van sinaasappels

	Rangordening van gekozen sinaasappels (1 = licht - 5 = donker)				
	1	2	3	4	5
Aantal mannen die deze rangordening kozen n1 = 10	0	0	2	3	5
Aantal vrouwen die deze rangordening kozen n2 = 10	0	2	2	5	1
C(m) = cumulatieve verdeling door mannen gekozen a)	0	0	2	5	10
C(w) = cumulatieve verdeling door vrouwen gekozen a)	0	2	4	9	10
D = ¦ C(m) - C(w) ¦ b)	0	2	2	4	0

a) D=4 is niet significant (omdat n1= n2= 10 zie tabel K, (appendix))

Zowel de één- als twee-steekproeven-toets volgt ongeveer dezelfde procedure.

Procedure (gevolgd in tabel 27)

a. De scores van twee steekproeven worden geordend in een cumulatieve verdeling waarbij dezelfde intervallen voor beide verdelingen worden gebruikt.

b. De grootste van de verschillen (D) tussen de beide verdelingen wordt bepaald, hier D = 4.

c. De bepaling van de significantie van de hier geobserveerde D hangt samen met de omvang van de steekproef enerzijds en de vraag of men een één- of tweezijdige toets wil gebruiken.

c1 Als $n_1 = n_2$ en beide ≤ 40 wordt tabel K gebruikt (appendix). Deze tabel geeft de kritieke waarden van D voor verschillende significantieniveaus aan voor zowel een eenzijdige als een tweezijdige toets. De hierboven geobserveerde waarde van D (D=4) met N=10 is lager dan de kritieke waarde in tabel K. Dus het verschil in rangorde bij dit niveau is niet significant.

c2 Wanneer $n_1 = n_2$ of wanneer beide groter zijn dan 40 kan tabel J (appendix) worden gebruikt. Wanneer de geobserveerde waarde van D groter is dan of gelijk aan de waarde van D zoals die is berekend door middel van de formule in de tabel, dan is de bevinding significant en kan de H_o worden verworpen.

10. Metrische data en één steekproef10. Metrische data en één steekproef

10.1 De Z-toets ingeval van een steekproef.1 De Z-toets ingeval van een steekproef

Deze toets wordt met name gebruikt bij de vraag of een bepaalde steekproef is getrokken uit een bepaalde populatie waarvan de parameters bekend zijn. Daarbij moet de onderliggende variabele metrisch en de steekproefomvang voldoende groot zijn. Wanneer aan deze voorwaarden niet is voldaan, kan een toets voor één steekproef met ordinale of nominale data worden gebruikt.

Voorbeeld:

Gegeven is een populatie met bekende parameters. Het gemiddelde (μ) is 100 en de standaarddeviatie (σ) is 20.

De steekproef, gebaseerd op 65 gevallen, heeft een gemiddelde (Install Equation Editor and double-click here to view equation. 66) van 107,5. De nulhypothese (H_0) luidt dat het gemiddelde van de steekproef niet significant afwijkt van het populatiegemiddelde.

Procedure:

Om de H_0 te toetsen moeten we eerst de standaardfout schatten door middel van formule (10.1).

(10.1) Install Equation Editor and double-click here to view equation. 67

Vervolgens berekenen we Z door middel van formule (10.2)

(10.2) z = Install Equation Editor and double-click here to view equation. 68

Uit tabel A kunnen we aflezen dat een Z met een waarde van 3 een kans heeft van p = .0013 om zich voor te doen. We kunnen bijgevolg de nulhypothese op 1% - niveau verwerpen, en concluderen dat onze steekproef niet is getrokken vanuit deze populatie.

11. Metrische data en twee steekproeven11. Metrische data en twee steekproeven

11.1 De T-toets.1 De T-toets

De t-toets kan alleen bij metrische data gebruikt worden. Onder de nulhypothese "geen verschil tussen de gemiddelden" wordt de t-toets in zijn algemeen gedefinieerd als de ratio van het verschil tussen de gemiddelden gedeeld door de standaardfout van het verschil (S_D).
De algemene basisvorm van de t-toets treft u aan in formule (11.1).

(11.1) t = Install Equation Editor and double-click here to view equation. 69 (Standaarddeviatie van het verschil)

Bij het gebruik van de t-toets moet naast het metrische meetniveau nog aan twee andere eisen zijn voldaan. Allereerst moeten de twee steekproeven ad random en onafhankelijk getrokken zijn. Ten tweede moeten de varianties homogeen zijn, dat wil zeggen de varianties van de populatie waaruit de steekproeven zijn getrokken zijn hetzelfde.
Als aan één van beide genoemde eisen niet is voldaan, moet de t-toets worden aangepast. Hieronder volgt hoe.

Werkprocedure bij het kiezen van de juiste t-toets.

1. **Bepaal of de twee steekproeven onafhankelijk of afhankelijk zijn.** Twee steekproeven worden afhankelijk genoemd wanneer iedere persoon in de steekproef gematcht is op een aantal criteria met een andere persoon in de tweede steekproef. Of wanneer de ene steekproef tweemaal wordt gebruikt, zoals in een "before-after design". Steekproeven zijn onafhankelijk wanneer verschillende mensen, die niet gematcht zijn, worden gebruikt in de steekproeven.
2. **Bepaal door middel van een F-toets of de varianties aan elkaar gelijk zijn of niet.** Om te bepalen of varianties aan elkaar gelijk zijn of niet wordt de F-toets voor de homogeniteit van de varianties (11.2) gebruikt.

(11.2) F = Install Equation Editor and double-click here to view equation. 70

waarbij $S1^2$ = de grootste van de twee steekproefvarianties

$S2^2$ = de kleinste van de twee steekproefvarianties.

Met deze F-toets (bij gebruik van formule 11.2) toetsen we de nulhypothese "geen verschil tussen de twee varianties". Wanneer de F-waarde niet significant is, blijft de nulhypothese overeind en beschouwen we de varianties als gelijk.

Voorbeeld F-toets:

Tabel 28

leeftijd voor twee groepen individuen.

X1	X2
28	41
26	33
22	29
20	27
20	27
20	25
19	

Install Equation Editor and double-click here to view equation. 71 = 22.14

Install Equation Editor and double-click here to view equation. 72 = 30.33

Install Equation Editor and double-click here to view equation. 73

Install Equation Editor and double-click here to view equation. 74

N1 = 7 N2 = 6

Install Equation Editor and double-click here to view equation. 75

Install Equation Editor and double-click here to view equation. 76

2a **Bereken de F-waarde als volgt:**

Install Equation Editor and double-click here to view equation. 77

2b Bepaal het aantal vrijheidsgraden (df) dat bij de F-waarde hoort.

Raadpleging van de F tabel leert ons dat de significantie van de geobserveerde F-waarde afhankelijk is van het aantal vrijheidsgraden (df) dat bij de F-waarde hoort. Het aantal vrijheidsgraden (df) bepaalt u als volgt:

{(N van de grotere variantie -1), (N van de kleinere variantie-1) dus voor de grotere variantie 6-1 = 5 en voor de kleinere 7-1 = 6. De df wordt hier dus: 5,6.

2c Bepaal met behulp van tabel F (appendix) de kans op een F-waarde die net zo groot is als de geobserveerde waarde, gegeven het aantal vrijheidsgraden.

De geobserveerde F-waarde van 2.76 blijkt kleiner dan de kritische waarde in de tabel met df (5,6) vrijheidsgraden.

Dit betekent dat de geobserveerde F-waarde van 2.76 niet significant is: de nulhypothese blijft overeind. We beschouwen de varianties als gelijk.

3. Vanuit uw resultaten onder 1 en 2 bepaalt u nu met behulp van tabel 29 met welk geval u te maken heeft: a, b, c, of d.

Tabel 29

4 gevallen in het gebruik van de t-toets bij 2 steekproeven		
	De varianties van de steekproeven zijn	
	gelijk	**verschillend**
onafhankelijk	casus a	casus b
afhankelijk	casus c	casus d

In tabel 29 worden 4 vormen van verschillende t-toetsen gegeven. Afhankelijk van de vraag of de steekproeven onafhankelijk zijn of niet en van de vraag of de varianties al dan niet gelijk zijn. Dus bijvoorbeeld geval a) refereert aan een vorm van een t-toets waarbij de varianties van de steekproeven gelijk zijn en de steekproeven zelf onafhankelijk zijn.

Casus a. de juiste t-toets formule is (11.3)

(11.3) Install Equation Editor and double-click here to view equation. 78

met df: N1 + N2-2

Toepassing van formule (11.3) op het voorbeeld van tabel 28 geeft dan:

Install Equation Editor and double-click here to view equation. 79

met df: = 7+6-2=11

De T-tabel (appendix B) laat een kans zien voor een t-waarde van (±) 3.11 met df (11) van p <.01. Met andere woorden de nulhypothese "geen verschil tussen de gemiddelden" kan worden verworpen.
Als N_1=N_2=N kan formule (11.3) worden vereenvoudigd in de formule (11.4).

(11.4) Install Equation Editor and double-click here to view equation. 80

waarbij N = N1 = N2

Casus b: een t-toets voor onafhankelijke steekproeven met verschillende varianties.

Wanneer de varianties volgens de F-toets verschillen dan is de algemene basisformule voor de t-toets als volgt: (11.5)

(11.5) Install Equation Editor and double-click here to view equation. 81 waarbij Install Equation Editor and double-click here to view equation. 82

en Install Equation Editor and double-click here to view equation. 83

Deze t-waarde kan echter niet worden geïnterpreteerd met behulp van de T tabel zoals die zojuist besproken is. De kritische t-waarde voor verschillende significantieniveaus dient te worden berekend met behulp van de Cochran en Cox (1950) toets: (11.6)

(11.6) t.05 = Install Equation Editor and double-click here to view equation. 84

Waarbij t.05 = de kritische waarde op het 5% niveau

Install Equation Editor and double-click here to view equation. 85 Install Equation Editor and double-click here to view equation. 86

t1 = de 5% waarde van t met N1-1 vrijheidsgraden (Appendix B)

t2 = de 5% waarde van t met N2-1 vrijheidsgraden (Appendix B)

U kunt uiteraard andere significantieniveaus dan het 5% niveau kiezen. Kiest u bijvoorbeeld 1% (t.01), dan moet u in formule (11.6) t.05 omzetten tot t.01 en ook voor t1 en t2 moet de 1% waarde worden genomen.
Als de absolute waarde van de berekende t in formule (11.5) groter is dan de kritische waarde van t berekend door middel van formule (11.6), verwerpen we de nulhypothese die geen verschil veronderstelt tussen het gemiddelde van het in formule (11.6) gekozen significantieniveau.

Een voorbeeld van casus b:

Stel dat we de volgende data hebben:

Groep I **Groep II**

Install Equation Editor and double-click here to view equation. 87 = 30

Install Equation Editor and double-click here to view equation. 88 = 40

Install Equation Editor and double-click here to view equation. 89 Install Equation Editor and double-click here to view equation. 90

N1 = 26 N2 = 31

dan: Install Equation Editor and double-click here to view equation. 91

Install Equation Editor and double-click here to view equation. 92

Install Equation Editor and double-click here to view equation. 93 overeenkomstig F tabel

F = 2 bij df (30,25) is significant

df (N2-1 = 30; N1-1 = 25) op het 5% niveau

Daarom is case b toepasbaar

Bij gebruik van (11.5)

Install Equation Editor and double-click here to view equation. 94

Bij gebruik van (11.6)

Install Equation Editor and double-click here to view equation. 95

Install Equation Editor and double-click here to view equation. 96

Vergelijken we de berekende t = 2.74 met de kritische waarden t.05 en t.01 dan blijkt dat de t-waarde significant is op het 5% niveau omdat haar absolute waarde groter is dan de waarde t.05 Deze t-waarde is echter niet significant op het 1% niveau, omdat zij kleiner is dan t.01.

Casus c: de t-toets voor afhankelijke, gecorreleerd steekproeven met gelijke variantie.

Een specifieke vorm van de formule voor de t-test is hier (11.7):

(11.7) t = Install Equation Editor and double-click here to view equation. 97

waarin de standaardfout van de verschillen met df (N-1) is:

Sed = Install Equation Editor and double-click here to view equation. 98

waarin Sd = de standaarddeviatie is van de verschillen tussen paren van observaties
N = het aantal paren.

~~Voorbeeld case c:~~

Stel dat we twee groepen scores hebben op een test uit dezelfde steekproef.

X1	X2	a) D	a) D^2			
				b)	Install Equation Editor and double-click here to view equation.	99
10	13	3	9			
12	12	0	0			
15	17	2	4		Install Equation Editor and double-click here to view equation.	100
18	17	-1	1			
8	14	6	36			
20	22	2	4			
22	26	4	16	c)	Install Equation Editor and double-click here to view equation.	101
15	18	3	9			
14	16	2	4			
16	20	4	16	d)	Install Equation Editor and double-click here to view equation.	102

N = 10

e) $t = 3.93$ df= 9 $p < .01$
(Appendix B)

Install Equation Editor and double-click here to view equation. 103

Install Equation Editor and double-click here to view equation. 104

H_0: Install Equation Editor and double-click here to view equation. 105 verworpen

Procedure geval c: (gevolgd in het voorbeeld van casus c)

a. Omdat de steekproeven afhankelijk zijn, kunnen verschillen tussen gepaarde observaties worden bepaald (zie kolom D) alsmede de gekwadrateerde verschillen (D^2)
b. Bereken de standaarddeviatie van de verschillen (Sd)
c. Bereken de standaardfout van de verschillen (Sed)
d. De t-waarde van de verschillen tussen de gemiddelde kan nu door middel van formule (11.7) worden berekend
e. De kans op deze t-waarde vindt u in de T-tabel bij N-1 vrijheidsgraden. Als deze kans kleiner is dan het verwerpingsgebied (α) dient de nulhypothese 'geen verschil tussen gemiddelden' te worden verworpen.

Casus d: De t-toets voor afhankelijke gecorreleerde steekproeven met verschillende varianties

Procedure:

1. De hier toe te passen t-toets wordt weergegeven door middel van formule (11.7) (zie hiervoor casus c). Wanneer u exact dezelfde procedure als daar beschreven volgt, dan vindt u een t-waarde die u echter niet kan interpreteren met behulp van de daar besproken T-tabel.
2. De kritische t-waarde bij de verschillende significantieniveaus dient te worden berekend door middel van formule (11.6). Volg exact dezelfde procedure bij het berekenen van deze kritische waarde als we deden bij casus b.
3. De conclusie over de significantie van de t-waarde (dat wil zeggen de significantie van de verschillen in gemiddelden) kan worden getrokken door middel van de vergelijking van de berekende t-waarde onder stap 1, met de kritische t-waarde onder stap 2.

   Wanneer de absolute waarde van de berekende t groter is dan de kritische t-waarde dient de H_o 'geen verschil tussen de gemiddelden' te worden verworpen. Met andere woorden het verschil is op dat niveau significant te noemen.

12. Bivariate analyses12. Bivariate analyses

Bij de bivariate analyse richt onze aandacht zich op de relatie tussen twee paarsgewijs gemeten variabelen. U kunt als onderzoeker geïnteresseerd zijn in:

a. De onderlinge afhankelijkheid van de variabelen; de sterkte van associatie tussen de variabelen. Er is sprake van correlatie wanneer twee variabelen systematisch gelijktijdig variëren. Met andere woorden: een verandering in de waarde van de ene variabele gaat altijd samen met een verandering in de waarde van de andere variabele. De correlatiecoëfficiënt brengt tot uitdrukking in welke mate beide variabelen samen variëren.
b. De mate waarin de ene variabele afhankelijk is van de andere; met andere woorden: 'in welke mate is de ene variabele (de afhankelijke variabele) te verklaren of zelfs weer te geven als een lineaire regressie-vergelijking van de andere variabele (de onafhankelijke variabele). Voorspelling is hierbij het hoofddoel.
c. De statistische significantie van de associatie tussen variabelen.

In dit hoofdstuk zullen we de meest gebruikte coëfficiënten behandelen die de mate van associatie tussen twee variabelen uitdrukken. Verder zullen we de bijbehorende significantietoetsen in het kort behandelen. De analyse van de afhankelijkheid tussen twee variabelen kunt u vinden in de regressieanalyse literatuur.

12.1 Maatstaven voor associatie tussen twee variabelen.1 Maatstaven voor associatie tussen twee variabelen

Er zijn verschillende coëfficiënten die de onderlinge afhankelijkheid tussen twee variabelen tot uitdrukking brengen. De meest gebruikte treft u in tabel 30.
Zoals u in tabel 30 kunt zien is de keuze van de coëfficiënt afhankelijk van het meetniveau van elk van de variabelen.

Tabel 30. Associatie coëfficiënten

Variabele Y	Variabele X: Nominaal	Ordinaal	Metrisch
Nominaal	Coëfficiënten gebaseerd op χ^2: Φ (Phi), contingentie-coëfficiënt C, Cramer's V^2		Coëfficiënt gebaseerd op χ^2: Phi, C, V^2 en Install Equation Editor and double-click here to view equation. 106 (eta)
Ordinaal		Kendall's Tau, Goodman & Kruskal's Gamma, Joules Q; Spearman's rang-orde corr. coëff.: r_s	Punt biserieel corr. coëff.: rpb; Install Equation Editor and double-click here to view equation. 107 (eta)
Metrisch			Pearson's produkt-moment corr. coëff.: r; Install Equation Editor and double-click here to view equation. 108 (eta)

In tabel 30 kunt u 4 groepen van associatie coëfficiënten onderscheiden:

1) **Coëfficiënten gebaseerd op χ^2**: Φ (Phi), de contingentie coëfficiënt C en Cramers V^2. Bij deze coëfficiënten vormt het concept van 'de voorwaardelijke kans' de basis voor het bepalen van de onderlinge afhankelijkheid van de variabelen.
2) **Coëfficiënten gebaseerd op monotone rangordening** van de paren van observaties: Kendall's Tau, Goodman en Kruskal's Gamma en Joules Q zijn coëfficiënten die de mate van monotone stijgende of dalende relaties in de data tot uitdrukking brengen.
3) **Coëfficiënten gebaseerd op de lineaire correlatie coëfficiënt**: Spearman's rangorde-correlatie-coëfficiënt r_s en de punt-biseriele correlatie coëfficiënt rpb zijn speciale toepassingen van de Pearson's produkt-moment correlatie coëfficiënt rho welke de sterkte van een lineaire relatie tussen twee variabelen tot uitdrukking brengt.
4) **De coëfficiënt** Install Equation Editor and double-click here to view equation. 109 (Eta) is een afzonderlijk geval omdat het een a-symmetrische associatie coëfficiënt is: het brengt tot uitdrukking in welke mate de ene variabele afhankelijk is van de andere. Voor alle hierboven genoemde coëfficiënten kunnen de twee variabelen

in principe onderling verwisseld worden, zonder dat dit effect heeft op de waarde van de coëffici-nt: Install Equation Editor and double-click here to view equation. 110terwijl Install Equation Editor and double-click here to view equation. 111xy is ongelijk Install Equation Editor and double-click here to view equation. 112yx.

Install Equation Editor and double-click here to view equation. 113 wordt hier behandeld omdat het een zeker voordeel biedt als u te maken heeft met non-lineaire relaties tussen variabelen.

12.2 Gewenste eigenschappen van associatiemaatstaven..2 Gewenste eigenschappen van associatiemaatstaven.

Wil een associatiemaat bruikbaar zijn dan dient zij te voldoen aan de volgende eigenschappen:

1. Er mag geen twijfel bestaan over de relatie tussen de mate van onderlinge afhankelijkheid en de waarde van de associatiecoëfficient:

   - De waarde moet 0 zijn als de variabelen onafhankelijk zijn
   - De waarde moet maximaal zijn als de onderlinge afhankelijkheid maximaal is.

2. Zo mogelijk moet het teken (- of +) van de coëfficiënt de richting van de onderlinge afhankelijkheid tot uitdrukking brengen.

   Twee variabelen worden positief afhankelijk genoemd als een toename in de waarde van de ene variabele vergezeld gaat met een toename van de waarde van de andere variabele. Er is sprake van een negatief verband als een toename in de waarde van de ene variabele samenhangt met een afname in de waarde van de andere variabele.

   Deze eigenschap van een associatiecoëfficiënt is alleen toepasbaar als een toename of afname in de waarde van een variabele kan worden gemeten. Derhalve dient een variabele op zijn minst op een ordinaal meetniveau gemeten zijn.

3. De waarde van de coëfficiënt moet worden genormeerd. Met andere woorden 'haar maximale en minimale waarde dienen bekend te zijn'. Deze extreme waarden zijn normaal gesproken -1 en +1: een maximaal positief verband krijgt de waarde +1, een maximaal negatief verband de waarde -1. De coëfficiënten voor variabelen met nominale schaal eigenschappen hebben gewoonlijk de extreme waarden 0 (geen verband) en 1 (maximaal verband).

13. Associatie coëfficiënten gebaseerd op $\chi^2$13. Associatie coëfficiënten gebaseerd op χ^2

13.1 Inleiding.1 Inleiding

Twee variabelen worden onafhankelijk genoemd wanneer de voorwaardelijke verdeling van de ene variabele niet afhankelijk is van de gegeven waarde van de andere variabele.

$f(X|Y_1) = f(X|Y_n) = f_1(X)$

Met andere woorden: de gezamenlijke verdeling van de variabelen is gelijk aan het produkt van de twee marginale verdelingen.

$f(X,Y) = f_1(X).f_2(Y)$

In de hieronderstaande tabel wordt een dergelijke onafhankelijkheid weergegeven.

Tabel 31. In geval van onafhankelijkheid is iedere celwaarde gelijk aan het produkt van zijn rij- en kolomtotaal :

		Waarden van variabele X		
		1	0	Totaal ($f_1(X)$)
Waarden van variabele Y	1	.30	.30	.60
	0	.20	.20	.40
Totaal ($f_2(Y)$)		.50	.50	1.00

Zo is bijvoorbeeld de waarde van cel 11 = (.60)(.50) = .30, derhalve geldt dat $f(X,Y) = f_1(X).f_2(Y)$.

De berekening van de χ^2 is gebaseerd op de bepaling van het verschil tussen de geobserveerde celwaarden en de, onder de hypothese van onafhankelijkheid, verwachte celwaarde. Met andere woorden:

Install Equation Editor and double-click here to view equation. 114

wat de basis vormt voor de χ^2 formule

Install Equation Editor and double-click here to view equation. 115

De procedure voor het berekenen van de χ^2 werd reeds eerder uitgelegd. (zie par. 4.3)

13.2 De coëfficiënten.2 De coëfficiënten

Als één of beide van de te bestuderen variabelen nominaal geschaald is, kan de χ^2 worden gebruikt ter bepaling van de vraag of de variabelen al dan niet statistisch onafhankelijk zijn. Omdat de χ^2-waarde afhankelijk is van de steekproefomvang is zij zelf als zodanig niet bruikbaar als associatiemaat. De Phi-kwadraat (Φ^2) corrigeert hiervoor:

Phi-kwadraat = Install Equation Editor and double-click here to view equation. 116

Een nadeel van deze coëfficiënt is dat zij niet is genormeerd. Het kan bewezen worden dat bij volledige onderlinge afhankelijkheid de maximale waarde van Phi-kwadraat bij een r x c-tabel L is, waarbij L het minimum is van r en c. Waarbij r het aantal rijen en c het aantal kolommen is.
Dit betekent dat de omvang van deze coëfficiënt afhankelijk is van het aantal categorieën van de variabele met het geringste aantal categorieën; bijvoorbeeld: bij een 3x4 tabel is het maximum van Phi-kwadraat 3-1=2 en bij een 2x2 tabel kan Phi-kwadraat maximaal 2-1=1 bereiken.
Bij het vergelijken van tabellen van verschillende omvang geeft dit problemen. Om aan dit probleem tegemoet te komen kan de contingentie coëfficiënt C worden gebruikt:

C = Install Equation Editor and double-click here to view equation. 117

De maximale waarde van C is daarbij altijd kleiner dan 1. Uit bovenstaande formule kan echter ook afgeleid worden dat de maximale waarde van C afhankelijk is van het aantal categorieën van de variabelen. Bij een

2x2-Tabel is Φ^2 maximaal 1 en C maximaal Install Equation Editor and double-click here to view equation. 118 = .71, en bij een 3x4-tabel is

Φ^2 maximaal 2 en C maximaal Install Equation Editor and double-click here to view equation. 119 = .82.

Hoewel de C-coëfficiënt meestal wordt gebruikt, verdient desondanks Cramer's V^2 de voorkeur:

Install Equation Editor and double-click here to view equation. 120 waarbij L = minimum van het aantal rijen en kolommen

V^2 heeft als voordeel dat voor iedere tabelgrootte de maximaal bereikbare waarde 1 is.

Speciaal probleem:

Bij de keuze van een associatie-coëfficiënt die gebaseerd is op χ^2 dient u als onderzoeker er rekening mee te houden dat deze coëfficiënten afhankelijk zijn van de marginale verdelingen van de variabelen.

Tabel 32

	32 A Variabele X			32 B Variabele X		
Variabele Y	-	+	Totaal	-	+	Totaal
-	120	3	123	120	15	135
+	30	27	57	30	145	175
Totaal	150	30	180	150	150	300

In bovenstaande tabellen A en B, is de gezamenlijke kans op (X,Y) hetzelfde. Als de variabele X de waarde '-' heeft, is de kans op een negatieve Y - 80%. De kans op Y + is in beide tabellen 20%. Bij een X = + zijn deze kansen respectievelijk 10% en 90%. De omvang van de associatiecoëfficiënt is echter voor ieder van de tabellen verschillend.

Voor tabel 32.A: $\Phi^2 = V^2 = .297$ en $C = .479$

Voor tabel 32.B: $\Phi^2 = V^2 = .531$ en $C = .589$

Vooral wanneer de marginale verdeling van een variabele het gevolg is van steekproeftrekking (bijvoorbeeld een min-score op variabele X betekent in ons voorbeeld 'mannen' en een plus 'vrouwen') is de sterkte van de associatie in de populatie (zie tabel 32b) verschillend. Dan moet een aanpassing plaatsvinden van de marginale verdeling aan de populatieverdeling waarbij het aantal mannen gelijk is aan het aantal vrouwen.

13.3 Toetsen van de significantie van een coëfficiënt op χ^2..3 Toetsen van de significantie van een coëfficiënt op χ^2.

Nulhypothese C = O (of Φ, $V^2 = 0$)

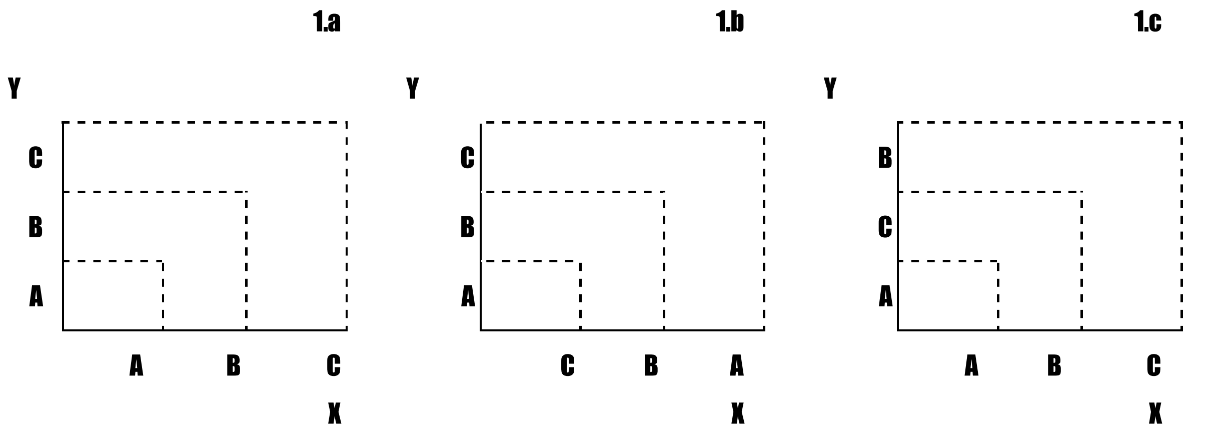
Bij het testen van de nulhypothese welke stelt dat twee variabelen onafhankelijk zijn (met andere woorden) H_0:C = 0 is de procedure vrij eenvoudig. Omdat C een associatiecoëfficiënt is die gebaseerd is op de χ^2 en de verdeling van χ^2 bekend is, kan de χ^2-toets worden gebruikt. De toets bestaat uit het bepalen van de kans op een χ^2 uit de tabel waaruit ook C is verkregen.
Voor tabel 32b bijvoorbeeld geldt dat Φ^2 = .531, hetgeen betekent dat $\chi^2 = \Phi^2.N$ = 159.3. De kans op die uitkomst bij (r-1) (C-1) = 1 vrijheidsgraad. Dat is minder dan .001. We kunnen dus concluderen dat Φ^2 significant verschilt van 0.

14. Associatie-coëfficiënten gebaseerd op monotone rangordening14. Associatie-coëfficiënten gebaseerd op monotone rangordening

14.1 De Goodman-Kruskal-Gamma coëfficiënt.1 De Goodman-Kruskal-Gamma coëfficiënt

De Goodman-Kruskal-Gamma coëfficiënt (Install Equation Editor and double-click here to view equation. 121) is een associatiemaat voor ordinale data. Het principe van deze toets kan het beste met figuur 1 worden geïllustreerd.

Figuur 1



De Install Equation Editor and double-click here to view equation. 122-coëfficiënt geeft de kracht aan van een monotone associatie tussen twee variabelen. In figuur 1.a is deze relatie monotoon stijgend. Tussen alle paren van observatie (A, B en C) is een monotoon stijgende lijn te trekken. In figuur 1.b is deze lijn monotoon dalend. In figuur 1.c echter loopt er geen monotoon stijgende of dalende lijn tussen alle paren van observaties. Van de drie mogelijke lijnen zijn er twee stijgend en één dalend. Het aantal stijgende lijnen geven we het symbool (P), welke hier de waarde 2 aanneemt, en het aantal dalende lijnen geven we het symbool Q welke hier de waarde 1 aanneemt.

De Install Equation Editor and double-click here to view equation. 123-coëfficiënt is de ratio van P en Q, welke de 'overall' positieve of negatieve relaties en de kracht van deze relaties tot uitdrukking brengt.

(14.1) Install Equation Editor and double-click here to view equation. 124

Uit formule (14.1) volgt dat de data in figuur 1.c. een Install Equation Editor and double-click here to view equation. 125 hebben van:

Install Equation Editor and double-click here to view equation. 126

Procedure

Bij berekening van Install Equation Editor and double-click here to view equation. 127 zou het ondoenlijk zijn om eerst alle mogelijke lijnen te trekken. De bepaling van P en Q vindt daarom als volgt plaats:

Tabel 33

	Variabele X		
Waarden	H	M	L
H	cel 11 2	cel 12 2	cel 13 1
variabele Y M	cel 21 0	cel 22 3	cel 23 0
L	cel 31 4	cel 32 1	cel 33 2

1. Orden de data in een frequentietabel waarbij de scoreposities op beide variabelen zijn gerangordend van hoog naar laag overeenkomstig tabel 33. De frequenties komen dus in deze tabel te staan.

2. Bepaal P als volgt: neem de som van alle celfrequenties die beneden en rechts van de linker-boven cel 11 staan en vermenigvuldig deze som met de frequentie van deze cel. Herhaal deze procedure voor iedere cel die beneden en rechts van zich ook cellen heeft staan.

Cel 11: (3 + 0 + 1 + 2)2 = 12

Cel 12: (0+2)2 = 4

Cel 21: (1 + 2)0 = 0

Cel 22: (2)3 = 6

P = Σ = 22

3. Bepaal Q op een gelijksoortige wijze: begin met de boven rechter-cel 13 en vermenigvuldig de frequentie van deze cel met de som van alle frequenties die beneden en links van deze cel staan. Herhaal deze procedure voor alle cellen die cellen onder en links van zich hebben.

Cel 13: (0 + 3 + 4 +1)1 = 8

Cel 12: (0 + 4)2 = 8

Cel 23: (4 + 1)0 = 0

Cel 22: (4)3 = 12

Q = = 28

4. Bereken Install Equation Editor and double-click here to view equation. 128 met gebruikmaking van formule (14.1)

Install Equation Editor and double-click here to view equation. 129

14.2 Joules Q.2 Joules Q

Joules Q is de Goodman-Kruskal's Install Equation Editor and double-click here to view equation. 130 voor een 2x2 tabel. Formule (14.1) wordt gereduceerd tot:

Install Equation Editor and double-click here to view equation. 131

a, b, c, en d representeren als volgt de frequenties in de cellen van de 2x2 tabel:

a	b
c	d

14.3 Kendall's tau .3Kendall's tau

Install Equation Editor and double-click here to view equation. 132 is een zeer geschikte associatiecoëfficiënt wanneer u beschikt over rangordeningen op twee variabelen X en Y.

De procedure bij het berekenen van Install Equation Editor and double-click here to view equation. 133 is gebaseerd op hetzelfde principe als gehanteerd werd bij Goodman-Kruskal's Install Equation Editor and double-click here to view equation. 134 en Joules Q. Voor ieder van de scoreparen wordt nagegaan of de relatieve rangordening op de eerste variabele al dan niet gelijk is aan de relatieve rangordening op de tweede variabele.

Tabel 34. Kendall's Tau

Voorbeeld: geen gedeelde ranggetallen

	Scores		Rangorde		Aantal hogere ranggetallen	Aantal lagere ranggetallen
persoon	X	Y	X	Y		
1	12	16	1	2	4	1
2	15	18	2	4	2	2
3	19	15	3	1	3	0
4	21	22	4	5	1	1
5	27	17	5	3	1	0
6	35	28	6	6	0	0

$p = \Sigma = 11 \qquad Q = \Sigma = 4$

$P\text{-}Q = 11\text{-}4 = +7$

$$= \frac{P-Q}{½N(N-1)} = \frac{+7}{½6(6-1)} = .47$$

Procedure: Berekening van Kendall's Tau (zie voorbeeld tabel 34).

a. Orden de ruwe scores op beide variabele, waarbij de X-scores lopen van laag naar hoog.

b. Start met persoon 1. Vergelijk de corresponderende waarde van Y, dit is 2, met alle daaropvolgende waarden van Y, dat zijn 4 1 5 3 en 6. Zowel alle Y-rangordeningsgetallen die hoger zijn alsmede alle Y-rangordeningsgetallen die lager zijn worden in samenhang met de X-rangordening opgeteld. Dus voor het eerste paar (X=1) Y=2, is vanuit de daarop volgende Y-rangordening af te leiden dat er 4 hoger zijn en er 1 lager is. Voor het tweede paar (X=2) Y=4, is van de 4 daarmee samenhangende Y-rangordeningen af te leiden dat er twee hoger en twee lager zijn. Deze procedure wordt voor ieder paar gevolgd.

c. Het verschil tussen de som van P voor alle hogere rangordeningen en de som van Q voor alle lagere rangordeningen wordt bepaald door:
P-Q=11-4=+7.

d. De maximale waarde van P-Q wordt bepaald. Dit is:
(N-1) + (N-2) + (N-3) + ...+ 1 = ½N(N-1).
De ratio van de geobserveerde en maximale waarde wordt als volgt berekend (14.2)

Kendall's tau Install Equation Editor and double-click here to view equation. 135

"Ties" in de rangordening.

Wanneer er "ties" (ex aequo situaties) in de rangordening van één of beide variabelen voorkomen is de maximale waarde voor P-Q lager dan ½N(N-1). De formule die in deze gevallen wordt toegepast is formule (14.3)

Install Equation Editor and double-click here to view equation. 136 waarin Sd = Install Equation Editor and double-click here to view equation. 137

waar M = ½N (N-1)

en Tx = Install Equation Editor and double-click here to view equation. 138

wanneer X = aantal scores dat 'tied' is voor een bepaalde rangorde van X

Install Equation Editor and double-click here to view equation. 139 Zie: Tx

Tabel 35. Kendall's Tau

Voorbeeld: gedeelde ranggetallen

	Scores		Rangorde		Aantal hogere ranggetallen	Aantal lagere ranggetallen
persoon	X	Y	X	Y		
1	20	84	1	3	2	1
2	35	80	2	2	4	0
3	38	84	3,5	3	2	0
4	38	84	3,5	3	2	0
5	53	91	5	5,5	0	0
6	65	91	6	5,5	0	0
					p = 10	Q = 1

P-Q = 9

Tx = Install Equation Editor and double-click here to view equation. 140 Ty = Install Equation Editor and double-click here to view equation. 141

M = Install Equation Editor and double-click here to view equation. 142N(N-1) = 15

Sd = Install Equation Editor and double-click here to view equation. 143 Tau = Install Equation Editor and double-click here to view equation. 144

14.4 Toetsen van de significantie van een rangordecoëfficiënt

14.4 Toetsen van de significantie van een rangordecoëfficiënt

H_0: T = 0 of Install Equation Editor and double-click here to view equation. 145 = 0 kan worden getoetst door de Z-waarde te berekenen met behulp van formule (14.4) als N ≥ 10:

Z = Install Equation Editor and double-click here to view equation. 146

In formule (14.4) kan Install Equation Editor and double-click here to view equation. 147 uiteraard worden vervangen door Install Equation Editor and double-click here to view equation. 148. Als N < 10 raadpleeg dan de appendix, waarin u de tabellen L tot en met O aantreft, voor de bepaling van de significantie van de verschillende rangordecoëfficiënten.

15. Correlatie coëfficiënten15. Correlatie coëfficiënten

15.1 Correlatie: Introductie van Pearson's Rho.1 Correlatie: Introductie van Pearson's Rho

De term correlatie verwijst naar de mate van een lineair verband tussen twee variabelen. Er is sprake van correlatie wanneer twee variabele gelijktijdig variëren, met andere woorden wanneer de ene groter wordt, de andere systematisch groter of kleiner wordt.

Tabel 36. Correlatie tussen twee variabele ratioschalen

Persoon	Variabele X	Variabele Y	$(X-\bar{X})^2$	$(Y-\bar{Y})^2$	$(X-\bar{X})*(Y-\bar{Y})$
1	10	2	16	4	(-4) *(-2)=8
2	12	4	4	0	(-2) *(0)=0
3	13	3	1	1	(-1) *(-1)=1
4	15	4	1	0	(1) *(0)=0
5	16	5	4	1	(2) *(1)=2
6	18	6	16	4	(4) *(2)=8
	$\Sigma = 84$	$\Sigma = 24$	42	10	19
	$\bar{X} = 14$	$\bar{Y} = 4$	$S^2_X = 8,4$	$S^2_Y = 2$	$S_{XY} = 3,8$

De variantie van beide variabele (S_x^2, S_y^2) kan worden berekend met behulp van onderstaande formule.

Install Equation Editor and double-click here to view equation. **149**

De covariantie is een maat die tot uitdrukking brengt in welke mate de afwijking van de scores van hun gemiddelden in dezelfde richting lopen.

De formule voor de covariantie is (15.1):

Install Equation Editor and double-click here to view equation. **150**

Wanneer van een paar observaties beide scores boven of beneden het gemiddelde liggen, leveren deze een positieve bijdrage aan de totale covariantie. Wanneer de score van een paar beneden het gemiddelde ligt en de andere hoger dan het gemiddelde, levert dat een negatieve bijdrage aan de covariantie. De maximale waarde van de covariantie is gelijk aan Sx.Sy. Omdat de covariantie afhankelijk is van de waarden van Sx en Sy wordt deze normaal gesproken genormeerd, dat wil zeggen dat de covariantie gedeeld wordt door het produkt van Sx en Sy waardoor de range loopt van -1 tot +1. Deze genormeerde covariantie wordt correlatie genoemd: r_{xy}

(15.2)

r_{xy} = Install Equation Editor and double-click here to view equation. **151**

Dus de r_{xy} van de data in tabel 28 is Install Equation Editor and double-click here to view equation. **152**

15.2 Spearman's rangorde correlatie coëfficiënt.2 Spearman's rangorde correlatie coëfficiënt

De Spearman rangorde correlatie coëfficiënt is een aanpassing van de Pearson produkt-moment correlatie-coëfficiënt voor gebruik bij ordinale data.
Deze toets wordt gebruikt wanneer beide variabelen op z'n minst ordinale schaaleigenschappen hebben en ook wanneer metrische data een extreem heterogene scoreverdeling hebben en de numerieke waarde van de scores minder van betekenis is dan de rangorde van die scores.

Tabel 37. Spearman's correlatie coëfficiënt

Voorbeeld: (geen "ties")

persoon	Rangorde (a) X	Rangorde (a) Y	di	di²
1	1	4	-3	9
2	2	1	1	1
3	3	2	1	1

(c) $r_s = 1 - \frac{6\Sigma di^2}{n^3 - n}$

```
¦ 4     4    3          1     1                       ¦
¦                                   (6).(12)          ¦
¦                              = 1 - --------- = .40   ¦
¦                                   125 - 5           ¦
¦ 5     5    5          0     0                       ¦
¦                               __                  ¦ ¦
¦ n = 5                 Σ di² = 12 (b)                 ¦
+---------------------------------------------------------------------------+
```

Procedure: (zie hierbij tabel 37)

a. Zet de ruwe scores op beide variabelen in een rangorde.

b. Bereken het gekwadrateerde verschil (di^2) voor alle gepaarde rangordeningen. Sommeer deze: $\Sigma\, di^2$.

c. Gebruik formule (15.3) om de Spearman rangorde coëfficiënt te bepalen.

(15.3) r_s = 1 - Install Equation Editor and double-click here to view equation. **153**

Rangordeningen met "ties"

Formule (15.3) is een speciaal voorbeeld van de algemene vorm van de Pearson produkt moment correlatie.

r = Install Equation Editor and double-click here to view equation. **154**

Waarbij in dit voorbeeld geldt:

155

Install Equation Editor and double-click here to view equation. **156**

Wanneer u een rangordeningen met "ties" heeft, dient u de formule voor kwadratensom, de varianties aan te passen:

Install Equation Editor and double-click here to view equation. **157**

Install Equation Editor and double-click here to view equation. **158**

Waarbij T = Install Equation Editor and double-click here to view equation. **159 waarbij f = het aantal "ties" binnen een rangordening.**

Tabel 38. Spearman's correlatie coëfficiënt

Voorbeeld: (met "ties")

Persoon	Ruwe scores		Rangorde		di	di²
	X	Y	X	Y		
1	12	31	1	2,5	-1.5	2.25
2	15	29	2,5	1	1.5	2.25
3	15	31	2,5	2,5	0	0
4	17	34	4	5	-1	1
5	21	34	5	5	0	0
6	28	34	6	5	1	1
n = 6					di² = 6.5	

Install Equation Editor and double-click here to view equation. 160

Install Equation Editor and double-click here to view equation. 161

f voor x = 2 (2 "ties": 2,5) f voor y = 2 en 3 (2 "ties": 2,5; 3 "ties": 5)

Install Equation Editor and double-click here to view equation. 162

Install Equation Editor and double-click here to view equation. 163

Install Equation Editor and double-click here to view equation. 164

Install Equation Editor and double-click here to view equation. 165

15.3 De punt-biseriële correlatie coëfficiënt: R_{pb}

15.3 De punt-biseriële correlatie coëfficiënt: R_{pb}

Wanneer te gebruiken: R_{pb} is een speciale variant van de Pearson's r. De punt-biseriële correlatie coëfficiënt kan worden gebruikt bij het tot uitdrukking brengen van de mate van een lineair verband tussen een continue metrische variabele en een dichotome variabele. Deze laatste variabele kan werkelijk dichotoom zijn (zoals bijvoorbeeld mannen en vrouwen) of door de onderzoeker zelf dichotoom gemaakt zijn (zoals bijvoorbeeld de waarden boven en beneden de mediaan). Bij een zelfgemaakte dichotome waarde wordt aanbevolen de biseriële correlatie coëfficiënt Rb te gebruiken. Omdat Rb statistisch en voor praktisch gebruik inferieur is aan de R_{pb} zal de Rb hier niet behandeld worden.
Aangetoond kan worden dat formule (15.4) voor Rpb afgeleid is van de Pearson's r formule.

(15.4) R_{pb}= Install Equation Editor and double-click here to view equation. 166

Mt = het gemiddelde van de continue variabele X
M1 = het gemiddelde van de continue variabele X voor de groep met code "1" op de dichotome variabele Y
Sx = de standaarddeviate van de continue variabele X
N1 = de N voor de groep met code "1" op de dichotome variabele Y
N0 = de N voor de groep met code "0" op de dichotome variabele Y

Voorbeeld:
Het verband tussen gezinsinkomen en gezinsbeslissingen met betrekking tot huishoudelijke apparatuur. Gezinsinkomen is een continue metrische variabele. Gezinsbeslissingen een dichotome: beslissingen worden 'samen' genomen of 'afzonderlijk'.

Tabel 39. Voorbeeld punt biseriële correlatie coëfficiënt

Variabele X: familie-inkomen (maandelijks x 100)	Variabele Y: nemen van beslissingen samen (code 1)	afzonderlijk (code 0)	totaal
7	0	2	2
8	2	2	4
9	2	4	6
10	3	3	6
11	8	2	10
12	9	3	12
13	14	4	18
15	10	4	14

17	4	4	8
20	6	4	10
25	2	6	8
35	0	2	2
Totaal n1 =	60	n0 = 40	n = 100

Mt = Install Equation Editor and double-click here to view equation. 167

M1 = Install Equation Editor and double-click here to view equation. 168

Install Equation Editor and double-click here to view equation. 169

$fx^2 = 2(7)^2 + ... + 2.(35)^2 = 24332$

$(\Sigma fX)^2 = [2(7) + 4(8)+ ... 2(35)]^2 = 2143296$

Sx = 5.439

R_{pb} = Install Equation Editor and double-click here to view equation. 170

Bij het berekenen van de Pearson's r met deze gegevens wordt de uitkomst

r = Install Equation Editor and double-click here to view equation. 171

Sx = 5.439

$Sx^2 = 29.58$

Sy = Install Equation Editor and double-click here to view equation. 172 waarbij p= proportie code 1 q= proportie code 0

$Sy^2 = 24$

Sxy = Install Equation Editor and double-click here to view equation. 173

Install Equation Editor and double-click here to view equation. 174

r = Install Equation Editor and double-click here to view equation. 175

15.4 Toetsen van de significantie van een Pearson r-type coëfficiënt

15.4 Toetsen van de significantie van een Pearson r-type coëfficiënt

Nulhypothese: R = 0

Bij de vraag of de verkregen R inderdaad wijst op een relatie tussen twee variabelen, beginnen we met de gebruikelijke nulhypothese dat de populatie R = 0 : (H_0 : R = 0). We toetsen deze R door middel van een Z of t-toets. Wanneer n (het aantal paren van observatie) gelijk is aan of groter is dan 30 gebruiken we de Z-toets; wanneer n kleiner is dan 30 de T-toets. De Z die geassocieerd is met de verkregen R kan worden bepaald door middel van formule (15.5).

Z = R (Install Equation Editor and double-click here to view equation. 176)

Als bijvoorbeeld R = 0.35 en n = 82 dan wordt Z (.35)(9) = 3.15 hetgeen wil zeggen dat deze waarde significant is op het 1%-niveau (zie tabel A appendix).
De t-waarde die samenhangt met de verkregen R kan worden bepaald door middel van formule (15.6)

t = Install Equation Editor and double-click here to view equation. 177

Als bijvoorbeeld R = .44 en n = 27 dan wordt:

t = Install Equation Editor and double-click here to view equation. 178

Deze t-waarde met (n-2) vrijheidsgraden is significant op het 5%-niveau (zie tabel B appendix).

Nulhypothese: R12 = R34

Beide R's zijn niet gecorreleerd.

Voor het toetsen van de nulhypothese dat de twee R's niet van elkaar verschillen, veranderen we de R's in Z-scoren met behulp van tabel M (appendix).
Dan kunnen we de Z-verdeling gebruiken om het verschil te toetsen tussen de verkregen Z's. Bijvoorbeeld:

R_{12} = .46 R_{34} = .63

n = 103 n = 84

Gebruik tabel M deze laat zien: Z_{12} = .50

dus Z = Install Equation Editor and double-click here to view equation. 179

Waarbij Install Equation Editor and double-click here to view equation. 180

Z = Install Equation Editor and double-click here to view equation. 181 welke waarde niet significant is

nulhypothese: R12 =R13

wanneer de R's gecorreleerd zijn.

Wanneer de situatie zich voordoet dat alle metingen van een zelfde steekproef zijn en variabele 1 gecorreleerd is met 2 alsmede met 3, dan dient de relatie tussen de paren van R's tevens in overweging te worden genomen. Een t-toets kan dan worden uitgevoerd met behulp van formule (15.7)

t = (R_{12} - R_{13}) Install Equation Editor and double-click here to view equation. 182

Deze formule kan worden geïnterpreteerd door middel van gebruikmaking van de tabel B (appendix) met n-3

vrijheidsgraden.

15.5 Interpretatie van een Pearson correlatie coëfficiënt.5 Interpretatie van een Pearson correlatie coëfficiënt

- Lineariteit.

De Pearson en de punt-biseriële correlatie coëfficiënt brengen tot uitdrukking in welke mate er een lineaire relatie bestaat tussen twee variabelen. Vaak is deze relatie tussen variabelen echter niet lineair. Een Pearson's r zou bij wijze van spreken 0 kunnen zijn, terwijl er toch nog een goede curve-lineair verband bestaat. De correlatie ratio, de eta (Install Equation Editor and double-click here to view equation. 183) coëfficiënt kan dan worden toegepast.

16. De correlatie ratio: Install Equation Editor and double-click here to view equation. 184 (eta) 16. De correlatie ratio: Install Equation Editor and double-click here to view equation. 185 (eta)

16.1 Inleiding.1 Inleiding

Stel dat we mensen uit verschillende inkomenscategorieën vragen stellen over hun gezinsbeslissingsgedrag. Het aantal beslissingen dat zij samen nemen - uitgaande van 10 beslissingen - 10 vereenvoudigd weergegeven in tabel 40.

Tabel 40:

Voorbeeld eta (Install Equation Editor and double-click here to view equation. 187)

		Gezinsinkomen x 100 (variabele Y)				
	X Y	8	11	13	15	18
Gezamenlijk genomen	4	1				1
beslissingen	5	1			1	1
(variabele X)	6	1			1	1
	7		1	1	1	
	8		1	1		
	9		1	1		
	10			1		
	X	5	7	8	6	5

De waarde van Pearson's R bij deze gevens is precies 0.

Uit het spreidingsdiagram van deze gegevens is echter duidelijk dat er een goed curve-lineair verband bestaat. Als wij vanuit het gezinsinkomen (variabele Y) een voorspelling zouden moeten doen ten aanzien van het aantal gezamenlijke beslissingen (variabele X), dan zouden we kiezen voor het gemiddelde van iedere categorie. Dit is immers de beste schatting volgens het principe van de kleinste kwadraten. Wanneer we bijvoorbeeld weten dat een bepaald gezinsinkomen valt in categorie 15, dan kunnen wij van daaruit voorspellen dat 6 van hun beslissingen gezamenlijk worden genomen. Wanneer we dit voor iedere categorie doen, dan is de som van de gekwadrateerde voorspellingsfout minimaal.

De totale variantie van de geobserveerde X-scores kan dan gesplitst worden in de variantie van de voorspelde scores en een restvariantie:

Xi = individuele score

Install Equation Editor and double-click here to view equation. 188 Install Equation Editor and double-click here to view equation. 189i = voorspelde score

Install Equation Editor and double-click here to view equation. 190 = totaal gemiddelde

totale variantie = voorspelde variantie + "rest" variantie

Sx^2 = S Install Equation Editor and double-click here to view equation. 191 + $S^2x.y$

De variantie van de voorspelde scores in relatie tot de totale variantie laat zien in welke mate we een juiste voorspelling hebben gedaan:

(formule 16.1)

Install Equation Editor and double-click here to view equation. 192

De correlatie ratio Install Equation Editor and double-click here to view equation. 193² vertelt ons hoe goed de lijn door de gemiddelden van de categorieën (de regressielijn) de varianties verklaart.

Procedure bij het berekenen van Install Equation Editor and double-click here to view equation. 194

a. Bereken het gemiddelde van de afhankelijke variabele, met andere woorden de variabele die wij willen voorspellen, voor iedere categorie van de onafhankelijke variabele: Xi.
   Voor tabel 40 zijn deze Xi's; 5, 7, 8, 6 en 5.
b. Bereken het totale gemiddelde voor de afhankelijke variabele X: Install Equation Editor and double-click here to view equation. 195

Install Equation Editor and double-click here to view equation. 196

c. Bereken S Install Equation Editor and double-click here to view equation. 197

Install Equation Editor and double-click here to view equation. 198

d. Bereken Sx²

Install Equation Editor and double-click here to view equation. 199

Install Equation Editor and double-click here to view equation. 200²xy = Install Equation Editor and double-click here to view equation. 201

Install Equation Editor and double-click here to view equation. 202xy = 0.77

16.2 Eigenschappen van Install Equation Editor and double-click here to view equation. 203 (eta).2 Eigenschappen van Install Equation Editor and double-click here to view equation. 204 (eta)

- Install Equation Editor and double-click here to view equation. 206 is a-symetrisch, dat wil zeggen dat Install Equation Editor and double-click here to view equation. 207²xy verklaart hoeveel variantie van X veroorzaakt wordt door Y en Install Equation Editor and double-click here to view equation. 208²yx de variantie van Y door X verklaart. Normaal gesproken is Install Equation Editor and double-click here to view equation. 209xy= Install Equation Editor and double-click here to view equation. 210yx, in het bovenstaande voorbeeld is Install Equation Editor and double-click here to view equation. 211yx bijna 0.
- **De range van** Install Equation Editor and double-click here to view equation. 212 loopt van 0 tot + 1. Omdat de Install Equation Editor and double-click here to view equation. 213-coëfficiënt alleen maar beschrijft in welke mate er een relatie bestaat tussen twee variabelen, maar niet in welke richting deze relatie loopt, heeft zij geen teken.

- **De waarde van** Install Equation Editor and double-click here to view equation. 214 wordt beïnvloed door het aantal categorieën van de onafhankelijke variabele. Deze moet groot zijn om het gemiddelde van de verschillende categorieën stabiliteit te verschaffen.

16.3 Toetsen van de significantie van eta (Install Equation Editor and double-click here to view equation. 215).3

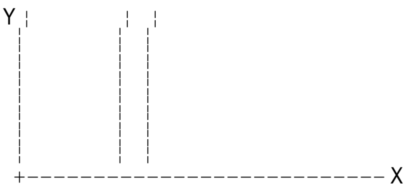
Toetsen van de significantie van eta (Install Equation Editor and double-click here to view equation. 216)

Om de nulhypothese Install Equation Editor and double-click here to view equation. 218 = 0 te toetsen kan een F-toets worden gebruikt. De ratio van de kwadratensommen (tussen en binnen categorieën) wordt getoetst door middel van formule (16.2).

$$F = \frac{SSb / c-1}{SSw / n-c}$$

SSb = de tussen kwadratensom = S^2xy
SSw= de binnen kwadratensom = Sx^2
n = aantal observaties
c = aantal kolommen
F kunt u interpreteren met behulp van de F-tabel bij (c-1) vrijheidsgraden voor het gekwadrateerde tussengroeps-gemiddelde en (n-c) vrijheidsgraden voor het gekwadrateerde binnengroeps- gemiddelde, welke respectievelijk de teller en de noemer van de formule (16.2) vormen.

- Restriction of range - beperking van de range



- Restricted range - beperkte range

Het komt bij onderzoek soms voor dat niet de totale range van scoreposities op een variabele worden gemeten. De relatie tussen inkomen en het nemen van beslissingen wordt bijvoorbeeld alleen bij hoge gezinsinkomens bekeken.

Het hanteren van een dergelijke beperkte range op de ene variabele heeft normaal gesproken effect op de mate van verband met de andere variabele. De correlatie zal dezelfde richting hebben als die voor de complete range tenzij de relatie curve-lineair is.

Maar over het algemeen gesproken zal de sterkte van het verband zwakker zijn. Wanneer wat nauwkeuriger naar de gegevens van tabel 33 wordt gekeken, zult u zien dat het verband tussen inkomen en het nemen van familiebeslissingen in feite curve-lineair is. In de middelste inkomenscategorie worden meer beslissingen gezamenlijk genomen. Terwijl voor de hogere en lagere inkomenscategorieën het tegengestelde het geval is. Dan zou dus een non-lineaire maat een goed verband aan het licht brengen. Om deze reden dient de onderzoeker allereerst zijn gegevens in een spreidingsdiagram weer te geven, alvorens over te gaan tot berekening van de associatiecofficiënt.

17. K steekproeven en een variabele17. K steekproeven en een variabele

Wanneer u beschikt over scoreverdelingen van meer dan twee steekproeven (of subgroepen) op één variabele, en u wilt een overall-test met betrekking tot de verschillen tussen de steekproeven, dan kunt u Cochrans Q-toets uitvoeren.

De Cochran Q-toets

Wanneer te gebruiken. De Cochran-toets is een uitbreiding van de McNemar's toets van de significantie van verandering, zoals die in hoofdstuk 5 werd behandeld. Zij verschaft een middel om de vraag te toetsen of drie of meer afhankelijke sets van frequenties of proporties al dan niet significant van elkaar verschillen. De "sets" worden afhankelijk genoemd wanneer zij zijn gematched op relevante karakteristieken, of wanneer dezelfde steekproef onder verschillende condities wordt gebruikt en het effect van deze condities wordt getoetst. De variabele die gemeten wordt, dient dichotoom (0 of 1) te zijn of een ordinale variabele dient gedichotoomiseerd te worden met andere woorden opgedeeld in 0 of 1.
De Cochran-test is in onderstaande gevallen bruikbaar:

- een panelstudie (op dezelfde steekproef) met verschillende metingen op dezelfde variabelen. Bijvoorbeeld het al dan niet kopen van een produkt op verschillende momenten in de tijd of het stemmen op één van twee mogelijke partijen, gemeten in de tijd, enz.
- studies onder een bepaalde steekproef of een toets, bestaande uit verschillende "items" of problemen, waarbij het "slagen of zakken" wordt gemeten. De scores op ieder van de K items (of problemen) worden vervolgens beschouwd als K steekproeven, welke zijn gematched omdat dezelfde personen in alle steekproeven vertegenwoordigd zijn.

Voorbeeld:

In tabel 41 wordt het slagen of zakken van 15 personen op 3 problemen weergegeven. Door middel van gebruikmaking van de Cochran Q-toets kan de significantie van de verschillen tussen de problemen worden bepaald. De nulhypothese dat er geen verschil tussen de problemen bestaat (met andere woorden dat de problemen een gelijke moeilijkheidsgraad hebben voor alle personen) kan worden getoetst.

Tabel 41 Scores van 15 personen op 3 problemen

	problemen					
persoon	a) 1	2	3	b) X_K	c) X_K^2	
1	1	1	0	2	4	
2	1	0	0	1	1	d) Q = Install Equation Editor and double-click here to view equation. 219
3	0	1	1	2	4	
4	1	1	0	2	4	
5	1	1	0	2	4	
6	1	0	0	1	1	
7	0	0	0	0	0	
8	0	0	0	0	0	
9	1	1	1	3	9	e) df = K-1 = 3-1 = 2
10	1	1	0	2	4	
11	0	0	1	1	1	Volgens tabel C (appendix):
12	1	0	0	1	1	
13	1	1	0	2	4	Q = 8.16 met df = 2 : p < .02
14	1	1	0	2	4	
15	1	0	0	1	1	
b) X_i	11	8	3	c) 22	d) 42	

Procedure: Cochran Q-toets (zie tabel 41)

a. Ken de scoren 1 of 0 toe aan personen die respectievelijk slagen of zakken voor ieder van de problemen. Stel een i x k (personen x problemen) tabel samen.

b. Sommeer i (de personen) voor elk afzonderlijk probleem.
   Ken hieraan het symbool Xi toe.
   We krijgen voor probleem 1: Xi : 11, voor probleem 2: Xi = 8 en voor probleem 3: Xi = 3.
   Sommeer k (de problemen) voor elk persoon. Ken hieraan het symbool Xk toe.
   Xk = 2 voor persoon 1, 1 voor persoon 2, etc.

c. Kwadrateer alle Xk's : Xk^2. Sommeer Xk en Xk^2 over alle onderwerpen: ΣXk en ΣXk^2

d. Substitueer deze in formule (17.1) en bereken de waarde Q.

e. De significantie van de waarde van Q kan worden bepaald met behulp van tabel C (appendix) waarin de kans op de berekende waarde van Q met (K-1) vrijheidsgraden is weergegeven.

formule 17.1:

Q = Install Equation Editor and double-click here to view equation. 220

18. Tabelanalyse18. Tabelanalyse

Inleiding

Analyse van gegevens in onderzoek verzameld begint veelal met een eerste controle. De meest eenvoudige maar tevens meest tijdrovende manier is de systematische controle van variabele na variabele, waardoor u als onderzoeker een ruw beeld krijgt van de verdeling van de scores op die variabelen. Daarmee kunnen afwijkingen van een normale verdeling, zeker wanneer u met variabelen op metrisch meetniveau te maken heeft, u als onderzoeker een indicatie geven van het soort toets dat voor die variabele gebruikt kan worden. Een t-toets kan bijvoorbeeld nauwelijks op een zeer scheve verdeling worden toegepast.

Een tweede stap in de data-analyse bestaat uit het maken van eenvoudige kruistabellen. Op tabellen kunnen, afhankelijk van de onderzoeksvraag, verschillende vergelijkingen en toetsen uitgevoerd worden. Vaak wordt daarbij de fout gemaakt te concluderen, wanneer er een significant resultaat wordt gevonden, dat het gevonden verschil of verband een causaal, oorzakelijk verschil of verband betreft. Dit hoeft echter niet het geval te zijn. Daarom hier eerst twee paragrafen theorie over causale en geobserveerde verbanden tussen variabelen, waarna de elaboratie techniek als hulpmiddel bij het interpreteren van significante uitkomsten kort wordt geintroduceert.

18.1 Causale relaties in tabelanalyse

Stel dat we drie variabelen meten X, Y en Z. De relatie tussen deze variabelen kan gevonden worden door middel van de drie mogelijk te vormen twee-weg tabellen: X vs Y; X vs Z en Y vs Z. Wanneer we beschikken over drie variabelen, zijn acht mogelijke causale gevallen te formeren. Van deze variabelen is Z altijd de afhankelijke, volgens een theorie of een causale noodzaak: Z wordt beïnvloed door X en/of Y maar kan uit theoretische overweging geen invloed uitoefenen op X en/of Y.(Z volgt in de tijd als gevolg van X of Y)

Figuur 1 Causale relaties bij de drie variabelen.

(1) X (2) X (3) X (4) X

⇗ ⇘

Y Z Y Z Y Z Y → Z

(5) X (6) X (7) X (8) X

⇗ ⇘ ⇘ ⇗ ⇗ ⇘

Y Z Y → Z Y → Z Y → Z

In het eerste geval zijn alle 3 variabelen onafhankelijk van elkaar. In de gevallen (2), (3) en (4) bestaat één causale relatie.

In geval (5) beïnvloedt de X variabele (de onafhankelijke) zowel de Y als Z variabele, welke op hun beurt geen causale relaties vertonen. Wanneer echter naar de data wordt gekeken vindt de onderzoeker een correlatie tussen Y en Z welke volledig wordt veroorzaakt door het effect van X op zowel de Y als Z. De correlatie tussen Y en Z wordt dan ook wel **schijnsamenhang** genoemd. In geval (6) beïnvloeden zowel de X als Y variabele ieder afzonderlijk de afhankelijk Z variabele. In dit geval spreken we van een tweezijdig-verband. In geval (7) is het verband tussen X en Z indirect, via variabele Y. Y is hier de leidende moderator variabele. Het verband tussen X en Z kan hier door middel van Y verklaard worden. Dit type van verband wordt vaak **interpretatie** genoemd.

Geval (8) is het **complete** geval: het is geval (5), (6) en (7) in een. Het verband tussen Y en Z is deels een schijnsamenhang door middel van het effect van X. Het verband tussen X en Z is deels interpretatief ten gevolg van het mediërende effect van Y. Ook geval (6) wordt binnen geval (8) gerepresenteerd: veranderingen in Z worden door zowel X als Y veroorzaakt.

18.2 Geobserveerde verbanden tussen drie variabelen.2 Geobserveerde verbanden tussen drie variabelen

Figuur 2 Geobserveerde verbanden bij de drie variabelen.

(1) X (2) X (3) X (4) X

⬀ ⬉

Y Z Y Z Y Z Y ↔ Z

(5) X (6) X (7) X (8) X

⬀ ⬁ ⬁ ⬀ ⬁ ⬀ ⬁

Y ↔ Z Y ↔ Z Y ↔ Z Y ↔ Z

(9) X
⬃ ⬂

Y Z

In figuur 2 worden dezelfde gevallen weergegeven die we ook in figuur 1 tegen kwamen, aangevuld met een negende geval.

Binnen de eerste 4 gevallen zijn de geobserveerde en causale verbanden identiek. In geval 5 observeert de onderzoeker echter een correlatie tussen Y en Z, terwijl er tussen hen beide geen causaal verband bestaat. Zo observeert de onderzoeker in geval (7) ook een verband tussen X en Z, terwijl in causale bewoordingen slechts een indirect verband (via Y) bestaat. Het is ook mogelijk, zoals blijkt uit geval (9), dat de onderzoeker geen verband vindt tussen Y en Z, terwijl er in feite in causale termen, wel een verband bestaat.
Binnen dit geval wordt het ware effect van Y of Z onderzocht door een tegengesteld schijnverband tussen Y en Z, welke door X is veroorzaakt.
Conclusie: de aan- of afwezigheid van een geobserveerd verband betekent niet noodzakelijk een al dan niet feitelijk causaal verband.

Onderzoeksconsequenties
Wanneer de onderzoeker wordt geconfronteerd met een geobserveerde relatie of een gebrek aan verband tussen twee variabelen, dient de interpretatie, en met name de causaliteit van de relaties, met de grootste voorzichtigheid te geschieden. Zoals we reeds zagen kan het geobserveerde verband van het geval 5 of 7 type zijn: een schijnverband of interpretatieverband, welke alleen door middel van het effect van een derde variabele op de geobserveerde variabelen kan bestaan. Vervolgens is bij afwezigheid van een geobserveerd verband nog altijd geval (9) mogelijk. Er kan, met andere woorden, een causaal verband tussen de variabelen bestaan, welke echter wordt verduisterd ten gevolge van een tegengesteld effect van een derde variabele. In de praktijk kan zich tevens een mengeling van deze effecten voordoen.
De informatie die door middel van de elaboratie analyse wordt verkregen, maakt het mogelijk de oorspronkelijk geobserveerde verbanden te specificeren.

18.3 De elaboratie techniek.3 De elaboratie techniek

De elaboratie techniek begint met de geobserveerde relatie tussen twee variabelen, welke kan worden gevonden door middel van beoordeling van een twee-weg-contingentie tabel.
Door het opvoeren van een derde variabele, de **test-variabele**, wordt de oorspronkelijke relatie geëlaboreerd. In het onderstaande zijn de Y en Z variabelen de oorspronkelijk geobserveerde variabelen, waarbij Z als de onafhankelijke variabele wordt beschouwd. X is de test-variabele. Wanneer in de drie mogelijke twee-weg-tabellen van X, Y en Z **geen** of maar **één** relatie kan worden geobserveerd, is de analyse reeds uitgevoerd. In een dergelijk geval kan worden geconcludeerd, dat de geobserveerde en de causale relatie een en dezelfde zijn, zoals kan worden afgeleid uit de gevallen (1) tot en met (4) in figuur 1 en 2. Alleen wanneer er twee of drie verbanden tussen de drie variabelen worden geobserveerd, is het mogelijk dat de onderliggende echte causale relatie verschilt van de geobserveerde relatie (zie geval (5), (7), (8) en (9) van figuur 2.

18.4 Voorbeelden van procedures uit de elaboratie techniek.4 Voorbeelden van procedures uit de elaboratie techniek

Hierna volgt een voorbeeld van de elaboratie techniek op de relatie tussen variabele Y: "het zien van een advertentie" en variabele Z "het kopen van het geadverteerde produkt". Z wordt hier gezien als de afhankelijke variabele.
Voorbeeld 1: schijnsamenhang, het oorspronkelijke verband verdwijnt.
We willen weten wat het effect van een advertentie op het kopen van een produkt is.
De gegevens uit tabel 43 werden hiertoe verzameld.

Tabel 43 Het effect van een advertentie op het kopen van een produkt

	Advertentie		
	gezien	niet gezien	totaal
produkt gekocht: ja	75	45	120
" " nee	25	55	80
totaal	100	100	200

De χ^2 over tabel 43 wordt overeenkomstig formule (6.4) berekend:

$\chi^2 =$ Install Equation Editor and double-click here to view equation. 221

Een χ^2 van 17.52 met df = 1 heeft een p < 002 (appendix Tabel C). Er bestaat dus een verband tussen het zien van een advertentie (variabele Y) en het kopen van het produkt (variabele Z). We weten echter nog niets over de causaliteit. Om dit te onderzoeken introduceert de onderzoeker een nieuwe variabele X: eerder produktgebruik. Deze nieuwe variabele correleert met beide andere variabelen. Omdat produktgebruik in de tijd beschouwt, plaats vindt voor beide andere variabelen, kan zij niet door haar beïnvloed zijn.
Bijgevolg kunnen de geobserveerde relaties worden geïnterpreteerd zoals dat in figuur 3 gebeurd is.

Figuur 3

geobserveerd	test: X is constant	resultaat	causaliteit
X	X	X	X
⇙ ⇘	⇙ ⇘	⇙ ⇘	⇙ ⇘
Y → Z	Y Z	Y Z	Y Z

Om de relatie tussen Y en Z te toetsen moet eerst het effect van X op beide bepaald worden. We kunnen dit bereiken door middel van constanthouding van de X-variabele, waardoor niet wordt toegestaan dat X effect heeft op Y en Z. Wanneer het gevolg hiervan is dat het verband tussen Y en Z verdwijnt, kunnen we concluderen dat deze relatie een schijnverband is. Het werkelijk causale verband wordt dus weergegeven door het meest rechtse geval van figuur 3. Om het effect van de variabele X af te leiden, eerder produktgebruik en de relatie tussen het zien van de advertentie en het kopen van het produkt, wordt tabel 44 samengesteld. Daar in de beide sub-tabellen 44a en b maar één niveau van de nieuwe variabele (eerder produktgebruik) wordt weergegeven en deze variabele voor beide subtabellen constant is kan eerder produktgebruik per definitie geen effect hebben op de relatie tussen adverteren en kopen.

Tabel 44. Het effect van een advertentie op het kopen van een produkt. Eerder produktgebruik is een constante variabele.

44a

Eerdere gebruiker

produkt	advertentie gezien	advertentie niet gezien
gekocht: ja	70	10
nee	17	3

44b

Geen eerdere gebruiker

produkt	advertentie gezien	advertentie niet gezien	totaal
gekocht: ja	5	35	120
nee	8	52	80

totaal	87	13		13	87	200

De χ^2 voor subtabel 44a bedraagt .01; is niet significant. Voor subtabel 44b bedraagt: χ^2 = .03; is niet significant. Dit wil zeggen dat binnen de twee produktgebruikers-categorieën geen verband bestaat tussen het zien van een advertentie en het kopen van het produkt. Het eerder geobserveerde verband tussen beide variabelen is een schijnverband.

Voorbeeld 2: Conditionele verbanden

Het oorspronkelijke verband is gespecificeerd. In het bovenstaande voorbeeld resulteerde de introductie van een nieuwe variabele tot het verdwijnen van het oorspronkelijke geobserveerde verband. Het is ook mogelijk dat de uitkomst, die uit tabel 45 zou kunnen zijn geweest.

Tabel 45 Advertentie versus kopen (2)

45a			45b			
Eerdere gebruiker			Geen vroegere gebruiker			
	advertentie			advertentie		totaal
	gezien	niet gezien		gezien	niet gezien	
produkt			produkt			
gekocht: ja	65	15	gekocht: ja	10	30	120
nee	10	10	nee	15	45	80
totaal	75	25		25	75	200

Uit de tabellen 45a en b komt een significant resultaat naar voren:

χ^2_a= 6.75 terwijl χ^2_b= 0.

De elaboratie techniek geeft de onderzoeker specifieke informatie over de oorspronkelijke relatie. Met andere woorden: alleen voor de groep personen die het produkt reeds eerder gebruikt hebben, heeft de advertentie een positief effect op het opnieuw kopen van het produkt.

Voorbeeld 3: Een interpretatief verband.

De onderzoeker beslist om de data van tabel 43 op een afwijkende wijze te elaboreren en wel door middel van het introduceren van een nieuwe variabele T. De evaluatie van het produkt door de consument. Wederom constateert hij drie positieve verbanden tussen de variabelen.

Figuur 4

geobserveerd toets: T = constant resultaat causaal geval

T T T T

↗ ↘ / ↘ ↗ ↗ ↘

Y → Z Y → Z Y Z Y Z

resultaat 2 causaal geval 2

T T

↗ ↗ ↘

Y → Z Y → Z

Wanneer de variabele T, de produktevaluatie, in tijd zou zijn gemeten na de advertentie, zouden de geobserveerde relaties kunnen worden geevalueerd zoals in figuur 4. De onderzoeker heeft twee interpretatie mogelijkheden ten aanzien van deze bevindingen. De eerste hypothese luidt, dat alleen wanneer de advertentie leidt tot een positieve produktevaluatie, de advertentie effect heeft op het koopgedrag. De tweede hypothese luidt, dat de advertentie twee effecten heeft. Het onder de eerste hypothese genoemde indirecte interpretatieve effect en een direct (non-cognitief) effect.

Om deze causale hypothesen te toetsen, dient het effect van T afgetrokken te worden door middel van het constant houden van die variabele zoals dat onder de "toets" in figuur 4 is weergegeven. Dit kan worden bereikt door middel van tabel 46.

Tabel 46 Advertentie versus kopen

Produktevaluatie als testvariabele

46a			46b			
positieve produktevaluatie			Negatieve produktevaluatie			
	advertentie			advertentie		
	gezien/niet gezien			gezien/niet gezien		totaal
produkt			produkt			
gekocht: ja	64	21	gekocht: ja	8	27	120
nee	11	4	nee	17	48	80
totaal	75	25		25	75	200

Voor de beide subtabellen 46a en b is de $\chi^2 = 0$, dit betekent dat het effect van het zien van de advertentie op het koopgedrag, een indirect effect is: via produktevaluatie, want de relatie tussen Y en Z, het zien van de advertentie en het kopen van het produkt, verdwijnt bij constanthouding van X, de produktevaluatie. Derhalve wordt de eerste hypothese betreffende het onderliggende causale geval bevestigd.

De elaboratie techniek vormt een overgang tussen bivariate en multivariate analyse en is dienstig als interpretatiehulp.

Appendix