Dynamische input-output-analyse. Appendix 2 van Inleiding tot de empirische macro-economie, deel 2

van Schaik, A.B.T.M.

Published in:
Inleiding tot de Empirische Macro-Economie, Deel 2

Publication date:
1983

Dynamische input-output-analyse

Appendix 2 van Inleiding tot de empirische macro-economie, deel 2

Ton van Schaik

Universiteit Tilburg

1983

In deze appendix wordt een summiere inleiding gegeven tot de dynamische input-output-analyse. Hieraan liggen onder meer de volgende overwegingen ten grondslag:

1 In paragraaf 2.4 is een voorbeeld gegeven van de statische input-output-analyse. De daar geschetste rekenprocedure was simpel doch zeer omslachtig. We zullen nu laten zien dat het efficiënter is om het hulpmiddel van de lineaire algebra (vectoren en matrices) te gebruiken.

2 De basisprincipes voor het rekenen met grote modellen kunnen aan de hand van lineaire modellen goed worden begrepen.

3 Er is een ontwikkeling gaande in de richting van empirische modellen, waarin de input-output-structuur van een economie expliciet gehandhaafd blijft c.q. opgenomen wordt.

Deze appendix bestaat uit twee delen, namelijk een over de statische input-output-analyse en een over de dynamische input-output-analyse. Het eerste onderdeel bevat een herhaling van paragraaf 2.4. In het tweede onderdeel wordt rekening gehouden met de factor tijd. Hierbij maken wij gebruik van het bekende dynamische *Leontief-model*. Daarnaast houden we expliciet rekening met het onderscheid tussen prijzen, hoeveelheden en waardebedragen. Hierbij kunnen we nog steeds uitgaan van tabel 2.5 (hier achter deze appendix), als we veronderstellen dat alle prijzen in ‘1970’ één zijn.

Statische input-output-analyse

In tabel 2.5 worden vijf sectoren onderscheiden. Derhalve kunnen we het volume van de bruto-output van de totale bedrijvensector opschrijven als een rijvector van bruto-outputs:

$$\boldsymbol{x'} = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$$

(Vectoren duiden we aan met kleine letters en matrices met hoofdletters. Rijvectoren herkent men aan het accent; kolomvectoren hebben geen accent.)

Volgens tabel 2.5 kan deze vector voor het jaar ‘1970’ als volgt worden gespecificeerd:

$$\boldsymbol{x'} = [50, 75, 20, 35.25, 8.375]$$

De som van deze bruto-outputs zijn we al in tabel 2.9 tegengekomen:

$$\boldsymbol{x'}\,\boldsymbol{e} = x \qquad (188.625)$$

Hierin symboliseert ***e*** de kolomvector van eentjes. In uitgeschreven vorm staat hier:

$$[50, 75, 20, 35.25, 8.375] \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 188.625$$

Ook het volume van de totale afzet kan in de vorm van een rijvector worden opgeschreven. In de input-output-analyse wordt deze vector de rijvector van finale bestedingen genoemd:

$$\boldsymbol{v'} = [b, c, g, i_{ou}, i_{vor}, i_{geb}]$$

In het voorbeeld staat hiervoor:

$\boldsymbol{v'}$ = [51.45, 58.8, 14.7, 11.025, 1.8375, 5.5125]

De som van de elementen in deze vector is de totale afzet:

$$\boldsymbol{v'}\,\boldsymbol{e} = v \qquad (143.325)$$

Naar analogie van de overgang van tabel 2.9 naar tabel 2.10 kan nu een input-output-model worden geconstrueerd. De getallen van tabel 2.5 dienen dan per kolom te worden uitgedrukt in het desbetreffende kolomtotaal. We zullen de resultaten van deze transformatie in zes onderdelen weergeven. Elk onderdeel dient ter vervanging van de overeenkomstige coëfficiënt uit tabel 2.10.

De coëfficiënt 0.3506 wordt vervangen door de matrix van input-coëfficiënten met betrekking tot de onderlinge leveringen:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} \end{bmatrix}$$

In het voorbeeld (zie tabel 2.5) zijn de meeste elementen van deze matrix nul:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.0625 & 0.10 & 0 & 0 \\ 0.10 & 0.325 & 0.15 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Hiermee kan het totaal van onderlinge leveringen als volgt worden teruggerekend:

$$\boldsymbol{e'}\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = 0 \qquad (66.1375)$$

(Hierin is $\boldsymbol{e'}$ de rijvector van eentjes en $\boldsymbol{x}$ de kolomvector van bruto-outputs.)

De coëfficiënt 0.1623 wordt vervangen door de rijvector van input-coëfficiënten met betrekking tot de invoer van grondstoffen, brandstoffen en halffabrikaten:

$\boldsymbol{m'_{gh}}$ = [0.25, 0.2125, 0.05, 0.0333, 0]

Daarmee kan de totale invoer van grondstoffen enzovoort als volgt worden teruggevonden:

$$\boldsymbol{m'_{gh}\, x} = m_{gh} \qquad (30.6125)$$

De coëfficiënt 0.3312 wordt vervangen door de rijvector van input-coëfficiënten met betrekking tot arbeid:

$\boldsymbol{y'_l}$ = [0.216, 0.272, 0.40625, 0.4666, 0.8]

Het totaal van de arbeidskosten kan dan worden gesteld op:

$$\boldsymbol{y'_l x} = y_l \qquad (62.475)$$

De coëfficiënt 0.1559 wordt vervangen door de rijvector van input-coëfficiënten met betrekking tot kapitaal:

$\boldsymbol{y'_r}$ = [0.184, 0.128, 0.09375, 0.2, 0.2]

De totale kapitaalkosten kunnen dan worden teruggerekend via:

$$\boldsymbol{y'_r\, x} = y_r \qquad (29.4)$$

Voor de coëfficiënt 0.8546 verschijnt een matrix van netto-output-coëfficiënten:

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 0.46 & 0 & 0.06155 & 1 & 1 & 0 \\ 0.39 & 0.32895 & 0.05549 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.71884 & 0 & 0 & 1 \\ 0.15 & 0.48684 & 0.15432 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.18421 & 0.00980 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(De coëfficiënten in de tweede en derde kolom van deze matrix zijn afgerond.) Het volume van de totale netto-output kan nu als volgt worden gevonden:

$$\boldsymbol{e'Dv_n} = v_n \qquad (122.4875)$$

Hierin is $\boldsymbol{v_n}$ de kolomvector van netto-outputs per bestedingscategorie en $\boldsymbol{Dv_n}$ de kolomvector van netto-outputs per sector:

$$\boldsymbol{v_n} = \begin{bmatrix} 51.45 \\ 44.688 \\ 14.5895 \\ 4.41 \\ 1.8375 \\ 5.5125 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{Dv_n} = \begin{bmatrix} 30.8125 \\ 35.575 \\ 16 \\ 31.725 \\ 8.375 \end{bmatrix}$$

De coëfficiënt 0.1454 tenslotte wordt vervangen door de rijvector van inputcoëfficiënten met betrekking tot de invoer van eindprodukten die zijn gerelateerd aan de netto-output:

$$\boldsymbol{m'_{ci}} = [0, 0.316, 0.008, 1.5, 0, 0]$$

De totale invoer van eindprodukten wordt dan:

$$\boldsymbol{m'_{ci}\, v_n} = m_{ci} \qquad (20.8375)$$

Hiermee is de zesde en laatste coëfficiënt van tabel 2.10 vervangen door een vergelijking. Alles bijeen resulteert het volgende model:

$$\boldsymbol{e'\,Ax} + \boldsymbol{e'Dv_n} = \boldsymbol{e'x} \qquad (1)'$$
$$\boldsymbol{m'_{gh}\,x} + \boldsymbol{m'_{ci}\,v_n} = m \qquad (2)'$$
$$\boldsymbol{y'_l x} = y_l \qquad (3)'$$
$$\boldsymbol{y'_r x} = y_r \qquad (4)'$$

Voegt men hier als schaal de kolomvector van netto-outputs aan toe, dan leidt de oplossing van dit model tot tabel 2.9. Tijdens dit terugrekenen gaat echter alle detailinformatie verloren over de afzonderlijke sectoren en de onderscheiden bestedingscategorieën. Deze informatie kan behouden blijven door de eerste vergelijking te ontdoen van de sommatievector $\boldsymbol{e'}$:

$$\boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{Dv_n} = \boldsymbol{x}$$

Voor het voorbeeld is dit een stelsel van vijf vergelijkingen. Hiermee kunnen alle bedragen in tabel 2.5 (zeer snel) worden teruggerekend. Uit dit stelsel volgt namelijk de oplossing van de bruto-outputs in termen van de netto-outputs:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{(I\text{-}A)^{-1}Dv_n}$$

De matrix ***I*** is de eenheidsmatrix:

$$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

In deze matrix zijn alle coëfficiënten op de diagonaal gelijk aan één en buiten de diagonaal gelijk aan nul. De matrix (**1-** ***A***)$^{-1}$ wordt de Leontief-inverse genoemd. In het voorbeeld:[1]

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \begin{bmatrix} 1.35 & 0.125 & 0.1921875 & 0.02777 & 0 \\ 0.2 & 1.5 & 0.30625 & 0.33333 & 0 \\ 0 & 0 & 1.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.11111 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

---

[1] De procedure voor de berekening van de inverse van een matrix staat in elke inleiding tot de lineaire algebra. We kunnen het principe eenvoudig toelichten aan de hand van de submatrix van het basissysteem:

$$\boldsymbol{I} \text{ - } \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & 1 - a_{22} \end{bmatrix} \rightarrow (I - A)^{-1} = \begin{bmatrix} (1 - a_{22})/D & a_{12}/D \\ a_{21}/D & (1 - a_{11})/D \end{bmatrix}$$

waarbij $\boldsymbol{D} = |\boldsymbol{I} \text{ - } \boldsymbol{A}| = (1\text{-}a_{11})(1\text{-}a_{22}) - a_{12}a_{21}$

In het voorbeeld:

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \begin{bmatrix} 1.35 & 0.125 \\ 0.2 & 1.5 \end{bmatrix}$$

Deze matrix komt in de plaats van de factor 1.54 die we in de hoofdtekst hebben gevonden.
De oplossing van de primaire kosten volgt na substitutie van (1) in (2)' tot en met (4)':

$$\boldsymbol{m'_{gh}}\,(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\,\boldsymbol{D}\boldsymbol{v_n} + \boldsymbol{m'_{ci}}\,\boldsymbol{v_n} = m \qquad (2)$$

$$\boldsymbol{y'_l}\,(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\,\boldsymbol{D}\boldsymbol{v_n} = y_l \qquad (3)$$

$$\boldsymbol{y'_r}\,(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\,\boldsymbol{D}\boldsymbol{v_n} = y_r \qquad (4)$$

Hierin verschijnt de matrix $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{D}$. In het voorbeeld:

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\,\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 0.6739166 & 0.054642 & 0.232467 & 1.35 & 1.35 & 0.1921875 \\ 0.727 & 0.655705 & 0.36713 & 0.2 & 0.2 & 0.30625 \\ 0 & 0 & 0.89855 & 0 & 0 & 1.25 \\ 0.1666666 & 0.540933 & 0.171466 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.18421 & 0.0098 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

In de vergelijkingen (2) tot en met (4) wordt deze matrix per kostencategorie voorvermenigvuldigd met de betreffende rij van directe kostenquoten. Aldus resulteren de gecumuleerde kosten-coëfficiënten, waarvan in tabel 2.13 een compleet overzicht is gegeven.

We kunnen nu ook goed laten zien dat de kostenopbouw van de netto-afzet door deze gecumuleerde kostencoëfficiënten wordt gevormd:

$$X = \boldsymbol{p'_p x} = \boldsymbol{p'_p A x} + p_{mgh}\,\boldsymbol{m'_{gh}}\,\boldsymbol{x} + p_l\,\boldsymbol{y'_l x} + p_r\,\boldsymbol{y'_r x}$$

ofwel

$$\boldsymbol{p'_p} = \boldsymbol{p'_p A} + p_{mgh}\,\boldsymbol{m'_{gh}} + p_l\,\boldsymbol{y'_l} + p_r\,\boldsymbol{y'_r} \qquad (16)$$

Hierin is:[2]

$\boldsymbol{p'_p}$: de rijvector van producentenprijzen:

$$\boldsymbol{p'_p} = [p_1, p_2, p_3, p_4, p_5]$$

En verder:

p_{mgh} = de prijs van de invoer van grondstoffen enzovoort

p_l = de prijs van arbeid

p_r = de prijs van kapitaal

Uit (5) volgt:

$$\boldsymbol{p'_p} = p_{mgh}\, \boldsymbol{m'_{gh}}\, (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} + p_l\, \boldsymbol{y'_l}\, (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} + p_r\, \boldsymbol{y'_r}\, (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} \tag{6}$$

De kosten per eenheid netto-output zijn:

$$\boldsymbol{k'_{nj}} = \boldsymbol{p'_p D} \tag{7}$$

Hierin is $\boldsymbol{k'_{nj}}$ de rijvector van de kosten per eenheid produkt, waarbij $j = b, c, g, i_{ou}, i_{vor}$ en i_{geb}. Uit (6) en (7) volgt:

$$\boldsymbol{k'_{nj}} = p_{mgh}\, \boldsymbol{m'_{gh}}\, (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\, \boldsymbol{D} + p_l\, \boldsymbol{y'_l}\, (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\, \boldsymbol{D} + p_r\, \boldsymbol{y'_r}\, (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\, \boldsymbol{D} \tag{8}$$

Hierin herkent men de kostenopbouw van de netto-output.

Dynamische input-output-analyse

Hierboven hebben we gezien dat de kern van het statische input-outputmodel wordt gevormd door het volgende stelsel vergelijkingen:

$$\boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{Dv_n} = \boldsymbol{x}$$

ofwel

---

[2] In het voorbeeld voor '1970' geldt dat alle prijzen één zijn.

$$\boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{x} \qquad (9)$$

Hierin symboliseert $\boldsymbol{c}$ de korte schrijfwijze van de kolomvector van netto-outputs per sector. Dit stelsel kan als volgt worden uitgebouwd tot een *dynamisch Leontief-model*:[3]

$$\boldsymbol{\hat{A}x}_{(t\text{-}1)} + \boldsymbol{B}[\boldsymbol{x}_{(t)} - \boldsymbol{x}_{(t\text{-}1)}] + \boldsymbol{\hat{c}}_{(t\text{-}1)} = \boldsymbol{x}_{(t\text{-}1)} \qquad (10)$$

Hierin zijn:

- $\boldsymbol{\hat{A}}$: de matrix van input-coëfficiënten met betrekking tot de onderlinge leveringen, de concurrerende invoer en de vervangingsinvesteringen;
- $\boldsymbol{B}$: de matrix van input-coëfficiënten met betrekking tot de voorraden;
- $\boldsymbol{\hat{c}}$: de kolomvector van finale bestedingen, verminderd met de concurrerende invoer.[4]

De essentie van dit model is dat expliciet wordt rekening gehouden met de netto- oftewel de uitbreidingsinvesteringen. Deze zijn gelijk aan het verschil tussen de voorraden van vandaag en die van gisteren:

$$\boldsymbol{Bx}_{(t)} - \boldsymbol{Bx}_{(t\text{-}1)}$$

Gegeven de vervangingsinvesteringen (in de meest ruime zin) en de finale bestedingen van gisteren, is volgens (10) dus bekend wat er ‘overblijft’ voor uitbreidingsinvesteringen. Deze worden aan de voorraden van gisteren toegevoegd. Daarmee is dan de groei van het systeem gedetermineerd.

We kunnen het bovenstaande model eenvoudig toelichten door het numeriek te specificeren. Daarbij gaan we uit van het voorbeeld voor ‘1970’, met name van input-output-tabel 2.5. Hieraan voegen we voor deze gelegenheid de volgende informatie toe.

In de eerste plaats veronderstellen we dat de gehele invoer tot de concurrerende invoer kan worden gerekend. Deze is als volgt over de onderlinge leveringen en de netto-outputs verdeeld:

---

[3] Dit is het dynamisch Leontief-model van het ‘forward-lag’ type. Daarnaast onderscheiden we ook modellen an het ‘backward-lag’type. Vergelijk hierover J. Tsukui en Y. Murakami, *Turnpike Optimality in Input-Output Systems*, Amsterdam 1979.

[4] Voor zover de investeringen onder de andere termen horen, worden ze niet tot de finale bestedingen gerekend.

Verdeling van de invoer van grondstoffen, halffabrikaten en brandstoffen over de onderlinge leveringen

	1	2	3	4	5	
1	7.5	5.3125				12.8125
2	5	10.625	1			16.625
3						
4				1.175		1.175
5						
	12.5	15.9375	1	1.175		30.6125

Verdeling van de invoer van eindprodukten over de netto-outputs

	c	g	i_{ou}	
1			6.615	6.615
2	2.94			2.94
3				
4	7.644	0.1105		7.7545
5	3.528			3.528
	14.112	0.1105	6.615	20.8375

In de tweede plaats veronderstellen we dat de vervangingsinvesteringen met betrekking tot outillage er als volgt uitzien:[5]

	1	2	3	4	5	
1	2.3	1.8	0.6325	0.52875	0.25125	5.5125

Voor het voorbeeld is de totale input van onderlinge leveringen, concurrerende invoer en vervangingsinvesteringen met betrekking tot outillage dan als volgt over de sectoren verdeeld:

[5] Eenvoudshalve zullen we de (vervangings)investeringen met betrekking tot bedrijfsgebouwen *niet* expliceren.

	1	2	3	4	5	
1	22.3	11.8	2.6325	0.52875	0.25125	37.5125
2	10	35	4	7.05		56.05
3			4			4
4				4.7		4.7
5						
	32.3	46.8	10.6325	12.27875	0.25125	102.2625

Deze getallen worden kolomsgewijs uitgedrukt in de betreffende bruto-output, hetgeen de matrix van input-coëfficiënten met betrekking tot de onderlinge leveringen, de concurrerende invoer en de vervangingsinvesteringen oplevert:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0.446 & 0.15733 & 0.131625 & 0.015 & 0.03 \\ 0.2 & 0.46666 & 0.2 & 0.2 & \\ & & 0.2 & & \\ & & & 0.133 & \\ & & & & 0.0 \end{bmatrix}$$

De *voorraden* zijn als volgt over de sectoren gealloceerd:

	1	2	3	4	5	
1	34.5	36	7.03125	26.4375	6.28125	110.25
2	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0

Op de regels staan de voorraden naar herkomst en in de kolommen de voorraden naar bestemming. In ‘1970’ is de totale voorraad 110.25 miljard gulden. Bij de samenstelling van deze tabel is eenvoudshalve verondersteld dat uitsluitend de outillage een rol speelt bij de groei. (In de praktijk zijn natuurlijk ook voorraden bedrijfsgebouwen, halffabrikaten, grondstoffen en brandstoffen aanwezig.)

Ook de voorraden kunnen kolomsgewijs worden uitgedrukt in de betreffende bruto-output. Dit levert de matrix van input-coëfficiënten met betrekking tot de voorraden:[6]

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0.69 & 0.48 & 0.3515625 & 0.75 & 0.75 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De kolomvector $\hat{\boldsymbol{c}}$ tenslotte kan als volgt worden berekend:

	b	c	g	i_{vor}	i_{geb}	m	$\hat{\boldsymbol{c}}$
1	23.667		0.989	1.8375		19.4275	6.975
2	20.0655	17.64	0.8095			19.565	18.95
3			10.4875		5.5125		16
4	7.7175	29.40	2.362			8.9295	30.55
5		11.76	0.143			3.528	8.375
	51.45	58.80	14.7	1.8375	5.5125	51.45	80.85

Het totaal van de kolomvector $\hat{\boldsymbol{c}}$ is 80.85 miljard gulden. Dit is precies 88% van de toegevoegde waarde van bedrijven. Er blijft dus 12% van de toegevoegde waarde over voor de bruto-investeringen in outillage. Merk hierbij op dat deze informatie alleen voor het jaar '1970' beschikbaar is. We kunnen het model dus alleen voor het jaar '1971' oplossen, *tenzij* een verband wordt gelegd tussen de finale bestedingen en de bruto-outputs. Anders gezegd: het model dient te worden gesloten om er groeipaden mee te kunnen berekenen. Een van de mogelijkheden hiertoe is de volgende:

$$\hat{\boldsymbol{c}}_{(\boldsymbol{t}\text{-}\mathbf{1})} = \tilde{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{v}'\boldsymbol{x}_{(\boldsymbol{t}-1)} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}_{(t\text{-}1)} \tag{11}$$

[6] Strikt genomen zouden alle nulposities in deze matrix moeten corresponderen met nulposities in matrix $\hat{\mathbf{A}}$. Vergelijk hierover bijvoorbeeld A.B.T.M. van Schaik, *Reproduction and fixed capital*, Rotterdam 1976.

Hierin is $\tilde{\boldsymbol{c}}$ de kolomvector van finale bestedingsquoten en $\boldsymbol{v'}$ de rijvector van toegevoegde-waardequoten. In het voorbeeld:

$$\tilde{\boldsymbol{c}} = \begin{bmatrix} 0.08 \\ 0.21 \\ 0.17 \\ 0.33 \\ 0.09 \end{bmatrix} \text{ en } \boldsymbol{v'} = [0.4, 0.4, 0.5, 0.666, 1]$$

Vermenigvuldiging van deze vectoren levert de volgende matrix:[7]

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 0.03 & 0.03 & 0.04 & 0.05 & 0.08 \\ 0.08 & 0.08 & 0.10 & 0.14 & 0.21 \\ 0.07 & 0.07 & 0.09 & 0.12 & 0.17 \\ 0.13 & 0.13 & 0.17 & 0.22 & 0.33 \\ 0.04 & 0.04 & 0.05 & 0.06 & 0.09 \end{bmatrix}$$

We vullen (11) nu bij (10) in. Daardoor ontstaat het volgende gesloten model:

$$\boldsymbol{\hat{A}x}_{(t\text{-}1)} + \boldsymbol{B}[\boldsymbol{x}_{(t)} - \boldsymbol{x}_{(t\text{-}1)}] + \boldsymbol{Cx}_{(t\text{-}1)} = \boldsymbol{x}_{(t\text{-}1)} \qquad (12)$$

Vervolgens voegen we de termen bij elkaar die betrekking hebben op de bruto-outputs van vorig jaar:

$$\boldsymbol{Bx}_{(t)} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\hat{A}} - \boldsymbol{C} + \boldsymbol{B})\boldsymbol{x}_{(t\text{-}1)} \qquad (12)'$$

Volgens dit stelsel vergelijkingen zijn de voorraden in het jaar t bekend als de bruto-outputs voor het jaar t - 1 gegeven zijn. We zullen dit voor het jaar ‘1971’ laten zien. Voor het voorbeeld ziet de matrix in het rechterlid van (12)’ er als volgt uit:

[7] De vermenigvuldiging van een rijvector met een kolomvector levert – zoals we hierboven hebben gezien – een getal.

$$\boldsymbol{I} - \hat{\boldsymbol{A}} - \boldsymbol{C} + \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1.21 & 0.29 & 0.18 & 0.68 & 0.64 \\ -0.28 & 0.45 & -0.30 & -0.34 & -0.21 \\ -0.07 & -0.07 & 0.71 & -0.12 & -0.17 \\ -0.13 & -0.13 & -0.17 & 0.64 & -0.33 \\ -0.04 & -0.04 & -0.05 & -0.06 & 0.91 \end{bmatrix}$$

De vector van bruto-outputs in ‘1970’ is hierboven al gegeven. De vector van voorraden (naar herkomst) voor ‘1971’ wordt dus:

$$\boldsymbol{Bx}_{(1971)} = \begin{bmatrix} 115.7625 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De groei van het systeem volgt nu uit een vergelijking van de voorraden in ‘1971’ met die in ‘1970’. Hieruit blijkt dat alle voorraden precies met 5% zijn toegenomen. We zullen dit toelichten aan de hand van de investeringen in outillage.

Sector	Bruto-investeringen van ‘1970’	Netto-investeringen van ‘1970’	Vervangings-investeringen van ‘1970’	Groeivoet in ‘1971’
1	4.025	1.725	2.3	0.05
2	3.6	1.8	1.8	0.05
3	0.9840625	0.3515625	0.6325	0.05
4	1.850625	1.321875	0.52875	0.05
5	0,5653125	0,3140625	0,25125	0.05
	11.025	5.5125	5.5125	

De groeivoeten (die in perunen luiden) zijn berekend door de netto-investeringen (in ‘1971’) te relateren aan de overeenkomstige voorraden in ‘1970’.

In het voorbeeld groeien alle voorraden met 5%. Er is dus sprake van een evenwichtige *sectorstructuur*. Deze blijft onder de gegeven omstandigheden, dat wil zeggen deze blijft - gegeven de matrices $\boldsymbol{\hat{A}}$, $\boldsymbol{B}$ en $\boldsymbol{C}$ - ook na ‘1971’ bestaan. Dit kan men eenvoudig nagaan door (12) te schrijven als:

$$\boldsymbol{\hat{A}}\,\boldsymbol{\hat{x}} + g\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{\hat{x}} + \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{\hat{x}} = \boldsymbol{\hat{x}} \tag{13}$$

Hierin symboliseert g de uniforme groeivoet (hier 0,05) en $\boldsymbol{\hat{x}}$ de betreffende evenwichtige sectorstructuur:[8]

$$\boldsymbol{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 0.265076 \\ 0.397614 \\ 0.106031 \\ 0.186879 \\ 0.044400 \end{bmatrix} \tag{14}$$

Stelsel (13) kunnen we ook schrijven als:

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\hat{A}} - \boldsymbol{C})\,\boldsymbol{\hat{x}} = g\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{\hat{x}} \tag{15}$$

We kunnen nu de evenwichtige waarden van $\boldsymbol{\hat{x}}$ en g bij (15) invullen. Dan blijkt dat de gelijkheden in het stelsel blijven opgaan, waarmee is aangetoond dat de evenwichtige sectorstructuur ook ná ‘1971’ blijft bestaan.[9]

[8] Dit is de kolomvector van bruto-outputs in ‘1970’, waarbij de getallen zijn uitgedrukt in perunen van het kolomtotaal.

[9] Het pad van evenwichtige groei dat we hier op het oog hebben, staat in de literatuur bekend als het pad van Von Neumann, ofwel de Turnpike. Dit is het pad van maximale groei op lange termijn in de context van de onderhavige input-output-structuur. Ook andere paden zijn denkbaar-met op korte termijn zeer hoge groeivoeten -, doch deze zijn op den duur economisch niet zinvol omdat ze gekenmerkt worden door negatieve voorraden. Formeel kan men een en ander inzien door de eigenwaarden en de eigenvectoren te berekenen van stelsel (15), dat voor dit doel als volgt wordt geschreven:

$$\frac{1}{g}\,\boldsymbol{\hat{x}} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\hat{A}} - \boldsymbol{C})^{-1}\,\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{\hat{x}}$$

De matrix in het rechterlid luidt:

In de praktijk is meestal sprake van *ongelijkmatige ontwikkelingen*. Hiermee kan als volgt rekening worden gehouden:

$$\boldsymbol{x} = \tilde{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{z} \tag{16}$$

Hierin symboliseert $\bar{\boldsymbol{x}}$ de vector van stationaire output-niveaus, die worden bepaald via

$$(\boldsymbol{I} - \hat{\boldsymbol{A}})\,\bar{\boldsymbol{x}} = \bar{\boldsymbol{c}} + \tilde{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{v}'\,\bar{\boldsymbol{x}} = \bar{\boldsymbol{c}} + \boldsymbol{C}\bar{\boldsymbol{x}}$$

Namelijk als

$$\bar{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{I} - \hat{\boldsymbol{A}} - \boldsymbol{C})^{-1}\ \bar{\boldsymbol{c}} \tag{17}$$

De vector $\bar{\boldsymbol{c}}$ determineert dus de sectorstructuur, waarbij de groeivoet van de economie precies nul is. De afwijking tussen de feitelijke en de stationaire output-niveaus wordt beschreven door:

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}} \tag{18}$$

Deze vector $\boldsymbol{z}$ vervangt in het stelsel (12) de vector $\boldsymbol{x}$. Vervolgens kunnen op adequate wijze paden van ongelijkmatige groei worden bestudeerd.[10]

$$(\boldsymbol{I} - \hat{\boldsymbol{A}} - \boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 6.26 & 4.35 & 3.19 & 6.80 & 6.80 \\ 9.39 & 6.53 & 4.78 & 10.20 & 10.20 \\ 2.50 & 1.74 & 1.28 & 2.72 & 2.72 \\ 4.41 & 3.07 & 2.25 & 4.80 & 4.80 \\ 1.05 & 0.73 & 0.53 & 1.14 & 1.14 \end{bmatrix}$$

Deze matrix kent vijf eigenwaarden - dit zijn de getalswaarden van $1/g$ (wortels) uit het bovenstaande stelsel vergelijkingen-, namelijk 0, 20, 0, 0, 0. Alleen de eigenvector die bij de eigenwaarde 20 hoort, bevat *uitsluitend* positieve elementen. De andere eigenvectoren bevatten ten minste één negatief element (= negatieve bruto-output) en zijn economisch dus niet zinvol. De positieve eigenvector staat onder nummer (14) in de tekst vermeld.

[10] Een uiteenzetting hierover valt buiten het bestek van dit boek. De geïnteresseerde lezer zij verwezen naar J. Tsukui en Y. Murakami, *Turnpike Optimality in Input-Output Systems*, Amsterdam 1979. Een eenvoudig voorbeeld willen wij de lezer niet onthouden. Als

$\tilde{\boldsymbol{c}}'$ = [0, 0, 0.18, 0.20, 0.50] en
$\bar{\boldsymbol{c}}'$ = [6.98, 18.95, -0.54, 12.18, -37.56]

Ter afsluiting van deze appendix zullen wij nog één belangrijke toepassingsmogelijkheid van het dynamisch Leontief-model onder de aandacht brengen, namelijk de betekenis van de zogenoemde dynamische Leontief-inverse. De oplossing- terug in de tijd - van het dynamisch Leontief-model geeft namelijk de gedateerde bruto-outputs (en daarmee zo men wil de gedateerde werkgelegenheid, het gedateerde energieverbruik, enzovoort) die ten grondslag liggen aan de finale bestedingen. Hierbij gaan we uit van stelsel (10):

$$\boldsymbol{x}_{(t-1)} - \hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x}_{(t-1)} - \boldsymbol{B}[\boldsymbol{x}_{(t)} - \boldsymbol{x}_{(t-1)}] = \hat{\boldsymbol{c}}_{(t-1)}$$

ofwel

$$\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}_{(t-1)} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_{(t)} = \hat{\boldsymbol{c}}_{(t-1)} \qquad (19)$$

waarbij

$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{I} - \hat{\boldsymbol{A}} + \boldsymbol{B}$$

Terug in de tijd gezien, kan de oplossing hiervan als volgt worden voorgesteld:

---

dan kent deze economie (met veel invoer van quartaire diensten) een Von Neumann-groeivoet van circa 7,6%. De sectorstructuur kan zich hier - zuiver rekenkundig gezien - op de volgende wijze naar toebewegen:

	1	2	3	4	5
t=1	3,4	2,1	6,4	3,7	33,9
t=2	3,6	2,3	6,5	3,9	27,2
t=3	3,7	2,4	6,5	4,0	23,0
t=4	3,8	2,5	6,6	4,1	20,1
t=5	4,0	2,6	6,7	4,3	18,0
t=10	4,7	3,3	6,9	4,9	12,7
t=30	6,6	5,8	7,4	6,8	8,4

In deze tabel staan de groeivoeten van de bruto-outputs. Deze zijn per sector berekend via

$$\frac{x_{(t)}}{x_{(t-1)}} = \frac{(1+g)^t[x_{(0)} - \tilde{x}] + \tilde{x}}{(1+g)^{t-1}[x_{(0)} - \tilde{x}] + \tilde{x}}$$

Overigens zij vermeld dat het in de praktijk zeer moeilijk is om aan betrouwbare $\tilde{\boldsymbol{c}}'$– en $\bar{\boldsymbol{c}}'$–vectoren te komen.

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{(0000)} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \boldsymbol{x}_{(1970)} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \boldsymbol{x}_{(2000)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \textbf{\textit{Dynamische}} \\ \textbf{\textit{inverse}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{c}}_{(0000)} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \hat{\boldsymbol{c}}_{(1970)} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \hat{\boldsymbol{c}}_{(2000)} \end{bmatrix}$$

Als eindpunt hebben we dus het jaar 2000 gekozen. Gegeven een mogelijke of gewenste ontwikkeling van de finale bestedingen in de jaren tachtig en negentig, kan hiermee worden berekend of deze ontwikkeling correspondeert met de sectorstructuur in de eerste helft van de jaren tachtig. Grote afwijkingen tussen de feitelijke en aldus berekende bruto-outputs in het begin van de jaren tachtig leiden dan tot aanbevelingen over de ‘beste’ sectorstructuur en desgewenst over ‘bijstellingen’ van de matrices $\hat{\boldsymbol{A}}$ en $\boldsymbol{B}$ en de finale bestedingen in de jaren tachtig en negentig.

Om dit te illustreren geven we voor ons voorbeeld in het jaar 2000 een eenmalige impuls in de bouwnijverheid:

$$\hat{\boldsymbol{c}}_{(2000)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Alle $\hat{\boldsymbol{c}}$ – vectoren vóór 2000 zijn dus gevuld met nullen.

We rapporteren de resultaten met betrekking tot de gedateerde bruto-outputs in de jaren tachtig en negentig:

Jaar	*Sector 1*	*Sector 2*	*Sector 3*
2000	-31,2	35,2	125
1999	28,8	10,8	0
1998	18,3	6,9	0
1997	11,7	4,4	0
1996	7,5	2,8	0
1995	4,7	1,8	0
1994	3,0	1,1	0

1993	1,9	0,7	0
1992	1,2	0,5	0
1991	0,8	0,3	0
1990	0,5	0,2	0
1989	0,3	0,1	0
1988	0,2	0,1	0
1987	0,1	0	0
1986	0,1	0	0
1985	0,1	0	0
1984	0	0	0

Duidelijk blijkt hieruit de betekenis van sector 1, die naast onderlinge leveringen ook outillage produceert.

De dynamische Leontief-inverse kan ook op het prijssysteem van input-output-modellen worden toegepast. De resultaten hiervan kunnen worden opgevat als immanente dynamische kostenontwikkelingen. Deze zijn wellicht nog belangrijker dan die van het volumesysteem. Leontief besluit in dit verband een van zijn artikelen met de volgende passage:[11] 'Much of what I have said should have a familiar ring. The "productive advances" of Francois Quesnay, the process of expanded reproduction of Karl Marx, and the "roundabout production" of Böhm-Bawerk all contain the basic theoretical notions incorporated in the derivation of the dynamic inverse. But while these great economists had to content themselves with the verbal description and deductive reasoning, we can measure and compute. Therein lies the real difference between the past en the present state of economics.'

[11] W. Leontief, 'The dynamic inverse' in A.P. Carter en A. Brody (eds.), *Contributions to Input-Output Analysis*, Amsterdam 1970.

Tabel 2.5 Input-output-tabel van de Nederlandse economie in ‘1970’

Input ↓ Output →	Input van											
	bedrijven					buitenland, gezinnen en overheid						Totale ouput
	sector 1	sector 2	sector 3	sector 4	sector 5	export	particuliere consumptie	autonome bestedingen	investering-en in machines	voorraad vorming	investe-ringen in bedrijfs-gebouwen	
sector 1	12.5	4.6875	2			23.667		0.898	4.41	1.8375		50
sector 2	5	24.375	3	7.05		20.0655	14.7	0.8095				75
sector 3			4					10.4875			5.5125	20
sector 4				3.525		7.7175	21.756	2.2515				35.25
sector 5							8.232	0.143				8.375
buitenland	12.5	15.9375	1	1.175			14.112	0.1105	6.615			51.45
arbeid	10.8	20.4	8.125	16.45	6,7							62.475
kapitaal	9.2	9.6	1.875	7.05	1,675							29.4
Totale input	50	75	20	35.25	8,375	51.45	58.8	14.7	11.025	1.8375	5.5125	331.95