Tilburg University

Het verdelen van steekproeven over subpopulaties bij accountantscontroles

Kriens, J.

Publication date:
1969

Document Version
Publisher's PDF, also known as Version of record

[Link to publication in Tilburg University Research Portal](#)

Citation for published version (APA):
Kriens, J. (1969). *Het verdelen van steekproeven over subpopulaties bij accountantscontroles*. (EIT Research Memorandum). Stichting Economisch Instituut Tilburg.

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

CBM

76R6

197626

1969

1

EIT

1

J. Kriens

Het verdelen van steekproeven over subpopulaties bij accountantscontroles

Bestemming	TIDSCHRIFTENBUREAU BIBLIOTHEEK KATHOLIEKE HOGESCHOOL TILBURG	Nr.
------------	--	-----

R1

T sampling
v accounting control

ECONOMISCH INSTITUUT TILBURG
ECONOMETRISCHE AFDELING

* C I N O O 4 6 9 *

Het verdelen van steekproeven over subpopulaties bij accountantscontroles

door J. KRIENS *

Summary „Stratification procedures for a typical auditing problem”.

During the past ten years, much experience was gained in The Netherlands in using random sampling methods for typical auditing problems. Especially, a method suggested by VAN HEERDEN [2] turned out to be very fruitful. In this method a register of entries is considered to be a population of T guilders, if all entries total up to T guilders. The sample size n_0 is determined in such a way that the probability β not to find any mistake in the sample, if a fraction p_0 or more of T is incorrect, is smaller than a preassigned value β_0 . So n_0 should satisfy $(1-p)^{n_0} \leq \beta_0$ for $p \geq p_0$. A complication arises if it is not possible to postpone sampling until the whole population T is available. One then wants to take samples from a population which is growing up to T . Suppose one is going to take samples n_i from e.g. r subpopulations

$$T_i \left(\sum_{i=1}^r T_i = T; \sum_{i=1}^r n_i = n_0 \right).$$

Using the minimax procedure, it is shown, that in this case one should choose the sizes n_i equal to $(T_i/T)n_0$. The minimax-value of the probability not to find any incorrect guilder in the r samples, taken together is equal to β_0 .

1. De guldenrangnummermethode van Van Heerden

In de afgelopen jaren zijn verschillende steekproefmethoden voorgesteld, welke rekening houden met de specifieke problemen die zich voordoen bij bepaalde accountantscontroles (vgl. [2] en [4]).

Vooraf de door VAN HEERDEN ontwikkelde guldenrangnummermethode blijkt, ook praktisch gezien, in talrijke situaties tot bevredigende resultaten te leiden.

Bij deze methode gaat men er van uit, dat een populatie, b.v. inkoopfacturen, debiteurensaldilijsten of voorraadlijsten positief gecontroleerd moet worden, d.w.z. men wil onderzoeken of een opgegeven totaalbedrag T niet te hoog is opgevoerd. Staan er op de lijst N posten, dan kan men de te controleren populatie opvatten, hetzij als een populatie van N posten, hetzij als een populatie van T guldens. Beide uitgangspunten kunnen tot statistisch verantwoorde resultaten leiden.

VAN HEERDEN kiest het tweede uitgangspunt. De populatie wordt geacht te bestaan uit T guldens, die in gedachten alle genummerd worden van 1 tot en met T . Stel nu dat een aselechte steekproef genomen wordt van n guldens en dat men besluit de lijst alleen dan te aanvaarden, wanneer bij de controle geen van deze guldens ten onrechte blijkt te zijn opgevoerd. Zijn er in werkelijkheid F guldens ten onrechte opgevoerd, dan accepteert men de lijst met kans

Notitie nr. 4 van het Rekencentrum van de Katholieke Hogeschool, Tilburg.

* Hoogleraar aan de Katholieke Hogeschool te Tilburg. De schrijver bedankt firmanten en medewerkers van de Nederlandse Accountants-Maatschap voor de discussies, die geleid hebben tot de in dit artikel behandelde problemen.

$$\beta(F) = \frac{\binom{T-F}{n}}{\binom{T}{n}}. \quad (1)$$

Voor $n \ll T$ is $\beta(F)$ in goede benadering gelijk aan

$$\left(1 - \frac{F}{T}\right)^n,$$

of, wanneer wij $F/T = p$ stellen:

$$\beta(p) = (1-p)^n. \quad (2)$$

Aangezien in de hier te bespreken controlesituaties in het algemeen aan de voorwaarde $n \ll T$ is voldaan, zal in het volgende steeds van formule (2) worden uitgegaan.

Men kan nu eisen dat $\beta(p)$ een bepaalde waarde β_0 niet overschrijdt, wanneer p groter is dan, of gelijk aan een gegeven waarde p_0 , b.v. 0,01.

Er moet dan voldaan zijn aan de voorwaarde

$$(1-p_0)^n \leq \beta_0 \quad (3)$$

uit welke ongelijkheid de minimaal vereiste waarde n_0 van n kan worden afgeleid (vgl. voor een aantal numerieke waarden van n [1], blz. 37).

2. Het verdelen van de steekproef over een aantal perioden

Een complicatie treedt op in die gevallen, waarin de populatie niet als één geheel ter beschikking komt. Men kan b.v. denken aan inkoop- of kostenfacturen, die in de loop van het jaar ontvangen worden. Om een steekproef uit de populatie van alle facturen te kunnen nemen zou men tot het einde van het boekjaar moeten wachten. De facturen zijn dan echter grotendeels opgeborgen waardoor het opzoeken van de in de steekproef aangewezen guldens zeer tijdrovend wordt. De voor de hand liggende oplossing is reeds gedurende het jaar met de controle te beginnen. Het jaar wordt dan in een aantal perioden ingedeeld en de steekproef wordt over deze perioden verdeeld. De vraag is nu op welke wijze deze verdeling dient te geschieden.

Wij gaan er ook hier van uit dat de kans β geen enkele fout in de steekproef aan te treffen, hoogstens β_0 mag zijn, wanneer het ten onrechte opgevoerde bedrag groter is dan, of gelijk aan een fractie p_0 van het totaal opgegeven bedrag T . De omvang n_0 van de in de loop van het jaar te nemen steekproef ligt derhalve vast.

Laten wij om de gestelde vraag te beantwoorden, aannemen dat het jaar verdeeld wordt in r perioden; zij verder

T_i het in de i -de periode verantwoorde bedrag,

p_i de fractie van T_i die ten onrechte is opgevoerd,

n_i de omvang van de in de i -de periode te nemen steekproef.

Aangezien het gaat om een in het gehele jaar te hoog opgevoerd bedrag, gelijk aan $p_0 T$ en een totale steekproef van n_0 eenheden, moet voldaan zijn aan de voorwaarden

$$\sum_{i=1}^r p_i T_i = p_0 T \quad (4)$$

en

$$\sum_{i=1}^r n_i = n_0. \quad (5)$$

Tenslotte geldt uiteraard

$$\sum_{i=1}^r T_i = T. \quad (6)$$

De kans in de in r delen gesplitste steekproef geen enkele fout te zien is nu niet meer gelijk aan $(1-p_0)^{n_0}$, doch, wanneer alle deelsteekproeven aselekt worden genomen, gelijk aan

$$\beta^* = \prod_{i=1}^r (1-p_i)^{n_i}. \quad (7)$$

Ook bij gegeven p_0 en n_0 is deze kans niet te berekenen, aangezien de waarden van de p_i en n_i onbekend zijn. Men kan het ook als volgt stellen: bij een gegeven te hoog opgevoerd bedrag $p_0 T$ heeft de fraudeur nog vrijheid dit bedrag op verschillende wijzen te verdelen over de verschillende perioden; evenzo heeft de controleur nog vrijheid in de wijze waarop hij de steekproef over de verschillende perioden verdeelt.

De waarden van de p_i zijn de accountant niet bekend. Om desondanks een antwoord te vinden op de gestelde vraag over de verdeling van de steekproef, gaan wij na, wat de ongunstigste situatie is die zich voor de controleur kan voordoen. De situatie is ongunstig wanneer β^* groot is en wij bepalen derhalve het maximum van β^* als functie van de p_i , waarbij bedacht moet worden dat de p_i aan (4) moeten voldoen. De vrijheid in de keuze van de n_i wordt vervolgens gebruikt om deze maximale waarde van β^* zo klein mogelijk te maken.

De methode waarbij men het maximaal mogelijke risico minimaliseert staat in de literatuur bekend als de *minimaxmethode*. Wiskundig gezien berekent men eerst

$$\max_{p_i} \prod_{i=1}^r (1-p_i)^{n_i} \quad (8)$$

onder voorwaarde (4). Dit kan met behulp van de multiplicatorenmethode van Lagrange; het resultaat is

$$\max_{p_i} \prod_{i=1}^r (1-p_i)^{n_i} = \left\{ (1-p_0) \frac{T}{n_0} \right\}^{n_0} \prod_{i=1}^r \left(\frac{n_i}{T_i} \right)^{n_i}. \quad (9)$$

Vervolgens wordt (9) geminimaliseerd als functie van de n_i onder voorwaarde (5). Door wederom Lagranges methode toe te passen vindt men

$$\min_{n_i} \max_{p_i} \prod_{i=1}^r (1-p_i)^{n_i} = (1-p_0)^{n_0}. \quad (10)$$

De gunstigste waarden n_{i0} van de n_i zijn

$$n_{i0} = \frac{T_i}{T} n_0 \quad (i = 1, \dots, r), \quad (11)$$

hetgeen betekent dat de steekproef in evenredigheid met de omvangen van de subpopulaties moet worden verdeeld.*

De fraudeur zal trachten de kans β^* zo groot mogelijk te maken. Hij kent echter de gekozen waarden van de n_i niet, maar kan proberen de voor hem ongunstigste waarde van β^* , te weten

$$\min_{n_i} \prod_{i=1}^r (1-p_i)^{n_i}, \quad (12)$$

te maximaliseren. Men bepaalt dan

$$\max_{p_i} \min_{n_i} \prod_{i=1}^r (1-p_i)^{n_i} \quad (13)$$

onder de voorwaarden (5) resp. (4). Het resultaat is

$$\max_{p_i} \min_{n_i} \prod_{i=1}^r (1-p_i)^{n_i} = (1-p_0)^{n_0} \quad (14)$$

en wordt bereikt als de fraudeur de waarden p_{i0} van de variabelen p_i alle gelijk kiest aan p_0 ; zijn optimale strategie is derhalve

$$p_{i0} = p_0 \quad (i = 1, \dots, r). \quad (15)$$

(Dat $\min_{n_i} \max_{p_i} \beta^*$ en $\max_{p_i} \min_{n_i} \beta^*$ aan elkaar gelijk moeten zijn volgt uit een bekende stelling uit de theorie van de strategische spelen met volledige informatie).

De bewijzen van de formules (9), (10), (11), (14) en (15) kan men vinden in [1], pag. 41.

Past de controleur formule (11) toe, dan is de kans niets te zien van een fractie p_0 aan te veel opgevoerde guldens in het ongunstigste geval gelijk aan de kans hiervan niets te zien, wanneer één aselechte steekproef uit de gehele populatie wordt genomen. De ongunstigste situatie doet zich voor als de fraudeur de te hoog opgevoerde fractie guldens in iedere periode even groot kiest. Doet hij dit niet, dan wordt de kans niets van de fraude te zien kleiner, hetgeen uit het volgende voorbeeld blijkt.

* Bij deze afleiding wordt er geen rekening mee gehouden, dat de variabelen n_i in feite alleen gehele waarden aan kunnen nemen.

In een bedrijf wil men de kostenfacturen steekproefsgewijze controleren. Het jaartotaal van de facturen wordt geschat op $T = 1.000.000$ gulden. Men stelt de eis dat, behoudens een kans $\beta_0 \leq 0,01$, één of meer fouten in de steekproef worden gevonden, wanneer het te hoog opgevoerde bedrag 1% of meer van T bedraagt, dus $p_0 = 0,01$. Uit formule (3) volgt $n_0 = 459$. De controle vindt per kwartaal plaats.

Laten de totalen per kwartaal gelijk zijn aan

$$T_1 = 240.000, \quad T_2 = 270.000, \quad T_3 = 270.000, \quad T_4 = 220.000.$$

Volgens formule (11) luiden de vereiste steekproefomvangen in de opeenvolgende kwartalen (afgerond)

$$n_{10} = 110, \quad n_{20} = 124, \quad n_{30} = 124, \quad n_{40} = 101.$$

Wordt een fraude ad 10.000 gulden eveneens naar evenredigheid van de T_i over de kwartalen verdeeld, dan is de kans geen enkele fout te vinden $(1 - 0,01)^{459} = 0,00992$. Bevindt de gehele fraude zich echter in het vierde kwartaal, dan zijn de p_i gelijk aan respectievelijk 0, 0, 0, $1/22$ en is de kans niets te zien $(1 - 1/22)^{101} = 0,00911$, hetgeen een vermindering van ruim 8% impliceert ten opzichte van 0,00992.

Zou men nog verder gaan splitsen en b.v. in ieder kwartaal tweemaal controleren, dan beïnvloedt dit de kans niets te zien, niet, wanneer de fraudeur eveneens naar evenredigheid verder verdeelt. Doet hij dit echter niet, dan wordt de kans niets te zien wederom kleiner. Ter illustratie splitsen wij in ons voorbeeld het vierde kwartaal en vervangen wij $T_4 = 220.000$ door $T_7 = 120.000$ en $T_8 = 100.000$.

Met formule (11) vinden wij voor de omvangen van de steekproeven in de nieuwe perioden $n_7 = 55$ en $n_8 = 46$. Bevindt de fraude zich volledig in de zevende periode, dan is $p_7 = 1/12$, de overige p_i zijn nul en $\beta^* = 0,00835$, een vermindering van bijna 16% ten opzichte van 0,00992.

Bij de berekeningen is steeds benaderingsformule (2) gebruikt.

De hier gevonden verdere vermindering van β^* is niet toevallig. Uit het bewijs van formule (14) volgt namelijk dat de waarde van β^* nooit toeneemt, wanneer wij, uitgaande van een bepaalde splitsing $T_1, \dots, T_r$ een verdere splitsing aanbrengen en daarbij formule (11) hanteren om de n_i te berekenen. Of β^* werkelijk daalt hangt af van de waarden van de p_i . Is een fraude gelijkmatig verdeeld over het gehele jaar, dan blijft β^* bij iedere splitsing gelijk aan $(1 - p_0)^{n_0}$.

Een ideale splitsing is er uiteraard één, waarvoor één of meer p_i -waarden gelijk zijn aan 1. Aangezien er over de vorm van zo'n ideale splitsing a priori weinig of niets bekend zal zijn, lijkt het het beste de splitsing zover mogelijk door te voeren, hetgeen bij een steekproef van de omvang n_0 betekent dat men de populatie in n_0 delen moet knippen en in ieder deel aselect één gulden moet aanwijzen.

Ook de invloed op β^* van de wijze waarop de splitsing in n_0 delen plaatsvindt is door de afhankelijkheid van de p_i onbekend. De minimaxoplossing is voor alle splitsingen dezelfde mits de benadering (2) van (1) gerechtvaardigd is. Deze benadering onderstelt $n_i \ll T_i$ en daarom verdient een splitsing in gelijke (of vrijwel gelijke) delen wellicht de voorkeur. De splitsing wordt dan door T en n_0 volledig bepaald. Werkt men met

lijsten van vooraf gemaakte en naar grootte gerangschikte aselechte getallen, dan verdient een lijst die op ieder interval

$$\left[\frac{iT}{n_0}, \frac{(i+1)T}{n_0} \right], \quad i = 0, \dots, n_0 - 1,$$

één aselechte getal bevat de voorkeur boven de klassieke lijst met n_0 getallen, aselechte aangewezen tussen 0 en T en vervolgens naar grootte gerangschikt.

Heeft men deze lijsten eenmaal, dan is het verdelen van de steekproef over een aantal perioden geen probleem meer: men schat T in het begin van het jaar (bij voorkeur aan de voorzichtige kant), stelt n_0 vast, kiest de bijbehorende lijst aselechte getallen en controleert de aangewezen guldens, zodra deze in de populatie van een controleperiode voorkomen. Wel dient men te bedenken dat op deze wijze geen aselechte steekproeven uit kwartalen of andere tijdsperioden tot stand komen, zodat men voor het maken van intervalschattingen van brutowinstpercentages, fracties accuratessefouten e.d. niet de gewone formules kan gebruiken, doch de formules voor gelede steekproeven gehanteerd moeten worden.

3. Steekproeven en de gezamenlijke betekenis van niet-ontdekte fouten

R. DE KONING heeft enige jaren geleden terecht opgemerkt (zie [3], blz. 258): „Wordt bij de controle van één jaarrekening meer dan één massa aan een steekproef onderworpen, dan zal de accountant rekening moeten houden met de *gezamenlijke betekenis* van eventueel bij de steekproeven onontdekt gebleven fouten voor zijn oordeelvorming.” (*cursivering* door mij aangebracht).

Bij de beantwoording van de vraag op welke wijze met deze gezamenlijke betekenis rekening kan worden gehouden, kunnen wij gebruik maken van de in paragraaf 2 toegepaste redenering. Immers, voegen wij alle steekproefsgewijze te controleren massa's samen tot één grote populatie, dan kan men vaststellen bij welk totaal aan fouten men, afgezien van een kleine kans, hiervan iets in de steekproef wil zien, vervolgens de daartoe vereiste steekproefomvang berekenen en tenslotte deze steekproef over de verschillende massa's verdelen.

Laat, ter illustratie, de resultatenrekening van een bedrijf er als volgt uitzien:

Verkopen	f 10.000.000
a. Grondstoffen en verpakking	f 4.500.000
b. Lonen en sociale lasten	„ 1.500.000
c. Overige kosten	„ 2.500.000
Afschrijvingen	„ 500.000
Tantièmes	„ 100.000
Vennootschapsbelasting	„ 400.000
	————— „ 9.500.000
Winst	f 500.000

Men wil de populaties a, b en c steekproefsgewijze controleren. Het totale bedrag T van deze massa's is f 8.500.000. Eerst dient vastgesteld te worden bij welk bedrag aan fouten men met grote waarschijnlijkheid één of meer fouten in de steekproef wil zien. Hieruit kunnen dan p_0 en n_0 worden afgeleid. Er liggen drie alternatieve methoden voor de hand om de n_0 te controleren guldens aan te wijzen:

1. een aselechte steekproef van n_0 eenheden uit het totaal van de massa's a, b en c;
2. de aan het einde van paragraaf 2 voorgestelde methode, waarbij de totale massa in n_0 gelijke delen wordt gesplitst;
3. aselechte steekproeven uit de afzonderlijke massa's a, b en c met toepassing van verdeelsleutel (11).

Is men alleen geïnteresseerd in te hoog opgevoerde bedragen en is het niet van belang in welke massa dit is gebeurd, dan verdient het tweede alternatief de voorkeur. Wil men echter bovendien specifieke kenmerken van de afzonderlijke massa's beoordelen, dan moet de laatste methode worden aangeraden. Tabel 1 bevat voor deze methode de vereiste steekproefomvang, wanneer men bij fouten van resp. 1%, 0,5% en 0,1% van het totaal ad f 8.500.000 behoudens een kans van hoogstens 1%, één of meer fouten in de steekproef wil aantreffen. Omdat men doorgaans ook verband wil leggen tussen het foutenbedrag en de winst is het eerstgenoemde bedrag ook steeds uitgedrukt als percentage van de gemaakte winst ad f 500.000.

Tabel 1. Steekproefsgewijze controle van een resultatenrekening

Populatie- omvang	Bedrag aan fouten als percentage van het totaal ad f 8.500.000								
	1%			0,5%			0,1%		
	als %			als %			als %		
	bedrag	v. d. winst	n_i	bedrag	v. d. winst	n_i	bedrag	v. d. winst	n_i
a. 4.500.000	45.000	9	243	22.500	4,5	487	4.500	0,9	2440
b. 1.500.000	15.000	3	83	7.500	1,5	165	1.500	0,3	828
c. 2.500.000	25.000	5	133	12.500	2,5	267	2.500	0,5	1335
8.500.000	85.000	17	459	42.500	8,5	919	8.500	1,7	4603

Literatuur

- [1] F. GÖBEL, J. KRIENS en W. MOLENAAR, Leergang Besliskunde, M.C. Syllabus 1.8, Minimax-methoden, netwerkplanning en simulatie, Mathematisch Centrum (1968).
- [2] A. VAN HEERDEN, Steekproeven als middel van accountantscontrole, Maandblad voor Accountancy en Bedrijfshuishoudkunde **35** (1961) 453-475.
- [3] R. DE KONING, Toepassing van steekproeven bij de accountantscontrole, Maandblad voor Accountancy en Bedrijfshuishoudkunde **39** (1965) 255-260.
- [4] P. DE WOLFF, Steekproeven bij administratieve controle, Statistica Neerlandica **10** (1956) 35-44.

Bibliotheek K. U. Brabant

17 000 01059116 3